

# カエルの鳴き声の音量計測による カエルの個体数の推定のための音響学的理論

川崎医科大学 物理学教室

近藤 芳朗

(昭和57年9月11日受理)

Acoustical Theory for the Estimation of the Number of Frogs

Yoshiro KONDO

Department of Physics, Kawasaki Medical School,

Kurashiki 701-01 Japan

(Received on sept 11, 1982)

## 概 要

カエルが集団で鳴いているときの音量を音響学的に求める問題の本質的な部分は複素平面上の酔歩の問題に帰着される。その結果、カエルの鳴き声の音量（音圧の2乗の長時間平均値） $Q$ はカエルの数密度  $n$  とカエル1匹が1回鳴いたときの音量  $q$  及びカエルの鳴いている時間の割合  $\alpha$  とに比例し、比例係数  $C$  はカエルの平面分布の形、大きさ、カエルの生息している平面の反射係数及び計測位置とに関係することが導びかれる。すなわち  $Q = Canq$  である。また、カエルが円内に分布する場合、計測位置の高さを変えて得たカエルの音量の実測値から、最小自乗法の援用によって、カエルの分布密度、範囲などの最適値が小さくなくとも原理的には得られることが示される。

## Abstract

It is found that the essential part of the problem to evaluate acoustically the total sound volume, which is defined by the long time average of square of total sound pressure, at the place where frogs were croaking is reduced to the problem of random walk in complex plane. As a result of this, it leads to the fact that the total sound volume ( $Q$ ) is proportional to the density of frogs ( $n$ ), the sound volume for one croaking of frog ( $q$ ) and the temporal rate of croaking ( $\alpha$ ), respectively and that its proportional coefficient ( $C$ ) depends on the shape and size of planar distribution of frogs, and on the position to record the sound volume, namely  $Q = Canq$ . It is shown that the optimal values of the density and the size of frogs' distribution in the circle can be obtained at least in principle from the measurement removing the height of the position to record the sound volume, with the method of least squares.

## §1. 緒 言

カエルには一部のカエルが鳴き始めると集団で鳴きだすという習性がある。この習性を利用して一群のカエルが一せいに鳴いているときにカエルの音量計測を行うことによって、カエルの個体数を大雑把につかむことの可能性が生まれる。前報<sup>1)</sup>では、カエルの数を測定するための音量計測によるシステムを考案し、このシステムに関与する生物学的因子、物理学的因子、計測学的因子について理論的及び実験的検討を行ってきた。さらに、音量計測による実測値とカエルの数を結びつける際の「音圧レベルは音源の個数の平方根に比例する」という結果を、かなり限られた条件のもとではあるが理論的に導いた。

この論文では、先づ、前報よりもっと一般的な条件のもとでカエルの音量とカエルの個数との関係を音響学的に導く。次にこの音響学的理論の結果を使って、カエルの分布密度、分布範囲を推定する一方法を提案する。

## §2. カエル1匹の音量

カエルが1匹鳴いているとき、カエルから離れたところにあるマイクロフォンに入る音量について考える。この音量を理論的に計算するために、カエルに対して次の音響学的仮定をする。

仮定1. カエルは点音源である。

仮定2. カエルは反射率一定の平面に生息している。

仮定3. 同じ種類のカエルの鳴き声の音圧の周波数の強度分布はどの鳴き声でも同じである。

以上の仮定を基礎にして、カエルの鳴き声の音圧（音波の圧力）について考える。

先づ、カエルの1回の鳴き声について考える。カエルの1回の鳴き声の音圧のフーリエ成分を  $p_0(\omega)$  とする。ここに  $\omega$  は音圧の角周波数である。仮定3. によるとどの鳴き声のフーリエ成分もその絶対値は同じである。また、 $p_0(\omega)$  は一般に複素数であって、 $p_0(\omega) = p_0(-\omega)^*$  が成立する。

次に鳴いているときには1、鳴いていないときには0の値をとる関数  $\alpha(t)$  を導入する。 $\alpha(t)$  は一般に下図のようになるものと考えられる。どの鳴き声でも1回の鳴き声に要する時間はいずれも等しく  $t_0$  であるとする。 $\alpha(t)$  の時間平均  $\bar{\alpha}$  は観測時間を  $T(T \gg 1)$  として

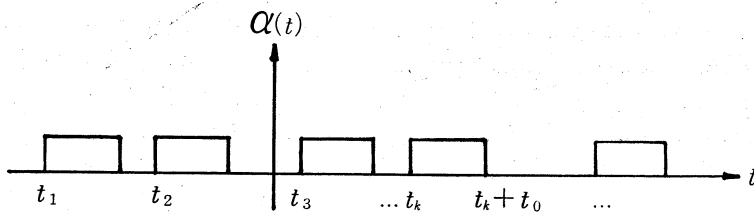


図 1

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{T} \int_0^T \alpha(t) dt \quad (1)$$

で定義する。他の物理量の時間平均も(1)と同様の式で定義するものとする。ところで、 $\bar{\alpha}$ には次の性質がある。

i)  $\bar{\alpha}$  (ひっきりなしに鳴いている)  $>$   $\bar{\alpha}$  (時々鳴いている)

ii) ひっきりなしに鳴いている場合

① 同じ種類のカエルでは  $\bar{\alpha}$  の個体差は小さい。

② 種類が異なるとき

$$1 \approx \bar{\alpha} (\text{アマガエル}) > \bar{\alpha} (\text{トノサマガエル}) > \bar{\alpha} (\text{ウシガエル}) \approx 0$$

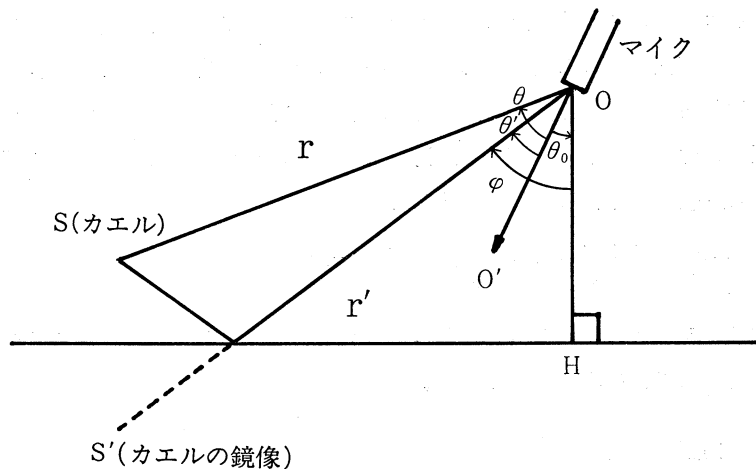
連続して鳴いている場合のカエルの音圧  $p(t)$  は個々の鳴き声の音圧の和として表わせる。個々の鳴き声の鳴き始めの時刻を  $t_k (k=1, 2, \dots)$  とすると

$$p(t) = \sum_k p_0(t-t_k) \quad (2)$$

である。ここに  $p_0(t)$  は  $t=0$  で鳴き始める1回の鳴き声の音圧である。カエルの鳴き声がマイクロフォンに達したときの音波の音圧  $p^*(t)$  はカエルの鳴き声が球面波として直接マイクロフォンに達する直達波  $p^*$  (直達波) とカエルの生息している平面に一度反射されてからマイクロフォンに達する反射波  $p^*$  (反射波) との和である。すなわち、

$$p^*(t) = p^*(\text{直達波}) + p^*(\text{反射波}) \quad (3)$$

である。下図のようにカエル (S) とマイクロフォン (O) の距離を  $r$ 、カエルの平面に対する鏡像 (S') とマイクロフォンの距離を  $r'$ 、マイクロフォンの向き  $OO'$  と  $OS$ 、および  $OS'$  とのなす角をそれぞれ  $\theta$ 、 $\theta'$  とし、 $O$  を通る鉛直線  $OH$  と  $OS'$  とのなす角を  $\varphi$ 、 $OO'$  と  $OH$



$$OS = r, OS' = r'$$

図2

のなす角を  $\theta_0$  とする。  $O'$  は  $OSS'H$  の作る平面上にあるとは限らないので一般には  $\theta' + \theta_0 \neq \varphi$  である。

これらの量と音速  $c$  を用いると

$$p^*(\text{直達波}) = \frac{1}{r} p(t-r/c) \quad (4)$$

$$p^*(\text{反射波}) = \frac{\sqrt{t_r(\varphi)}}{r'} p(t-r'/c) \quad (5)$$

である。上式で  $t_r(\varphi)$  はカエルの生息している平面による音波の反射率で、 $\varphi$  に依存する。

以上は空気による音波の減衰を考慮しない場合であったが、音波の減衰を考慮すると、最終的な  $p^*(t)$  の表示式として

$$p^*(t) = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{j\omega(t-r/c) - r'\omega^2 r} d\omega \\ + \frac{\sqrt{t_r}}{r'} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{j\omega(t-r'/c) - r'\omega^2 r'} d\omega \quad (6)$$

を得る。 $p(\omega)$  は  $p(t)$  のフーリエ成分である。また  $r=r'\omega^2$  は音波の吸収係数であって、これは音波の周波数に依存する。 $r \gg d = \overline{SS}^2/2$  では  $r \cong r'$ 、 $\theta \cong \theta'$  であり、また、カエルの鳴き声の特徴的な周波数を  $f_0$  とすると  $(f_0 d/c) \ll 1$ 、かつ  $(2\pi r' f_0^2 d) \ll 1$  であるとき直達波と反射波の位相差は無視できる。このような条件のもとでは(6)式の右辺の第2項の  $r'$  は  $r$  に置き換えてよい。 $d=4\text{cm}$ 、 $f_0=10^3\text{Hz}$ 、 $C=340\text{m/s}$ 、 $15^\circ\text{C}$  のとき  $f_0 d/c=0.1$ 、 $2\pi r' f_0^2 d=9 \times 10^{-6}$  だから、特に巨大なカエルでない限り、また平面から離れていない限り以上の諸条件は常に成立するものと考えてよい。

さて、マイクロフォンまで達した  $p^*(t)$  はマイクロフォンに入ると電気的信号に変換され、録音される。この電気的信号に変換されたものを何らかの形で数量化したものがカエルの音量の実測値と呼ばれるものである。電気的信号に変換されたものも本質的に音波と変わらないのでこれを音圧の単位で表わし  $p(\text{電気})$  と記す。 $p(\text{電気})$  と  $p^*(t)$  はマイクロフォンの指向性  $f(\theta)$  と  $p(\text{電気})=f(\theta)p^*(t)$  の関係にあるので

$$p(\text{電気}) = \frac{1 + \sqrt{t_r} f(\theta)}{r} \int_{-\infty}^{\infty} p(\omega) e^{j\omega(t-r/c) - r'\omega^2 r} d\omega \quad (7)$$

となる。(7)式は1匹のカエルが鳴いた場合のマイクロフォンに入るカエルの音圧を表す式であり、以後の考察の基礎となるべきものである。

### §3. カエルの集団の音量

1つの種類のカエルが全部で  $N$  匹、ある領域内に生息しているとす。  $i$  番目のカエル ( $i=1, 2, \dots, N$ ) についての諸量を前節で導入した諸量 ( $r, r', \theta, \theta', \varphi, \alpha, p(\omega)$ ) に添字  $i$  を付け加えることによって ( $r_i, r'_i, \theta_i, \theta'_i, \varphi_i, \alpha_i, p_i(\omega)$ ) などのように表す。個々のカエル

の鳴き声は合成されてマイクロフォンに達し、電気信号に変換される。この電気信号を  $P$ (電気) と記すと前節の結果を拡張して

$$P(\text{電気}) = \sum_i \frac{1 + \sqrt{t_r(\varphi_i)}}{r_i} f(\theta_i) \int_{-\infty}^{\infty} p_i(\omega) e^{j\omega(t - \frac{r_i}{c}) - r'\omega^2 r_i} d\omega \quad (8)$$

を得る。数量化できるのは何らかの形の時間平均値であるが、上式から明らかなように  $P$ (電気) の直接の時間平均値  $\overline{P(\text{電気})}$  は 0 である。このような場合には、絶対値平均、2乗平均などが考えられる。通常の電気計器では絶対値平均を採用しているものが多いが、ここでは理論的簡単さのために2乗平均について考えることにする。簡単な計算により

$$\overline{P(\text{電気})^2} = \int_{-\infty}^{\infty} |Z(\omega)|^2 d\omega, \quad Z(\omega) = \sum_i z_i \quad (9)$$

を得る。ただし

$$z_i = \frac{1 + \sqrt{t_r}}{r_i} f(\theta_i) p_i(\omega) \exp[-j\omega \frac{r_i}{c} - r'\omega^2 r_i] \quad (10)$$

である。複素数  $p_i(\omega)$  の偏角を  $\delta_i$  とすると複素数  $z_i$  の偏角  $\phi_i$  は

$$\phi_i = \delta_i - \frac{\omega r_i}{c} \quad (11)$$

で与られる。計測時間  $T$  の音量計測を繰返して行くと、計測のたびに各  $\delta_i$  は変動する。したがって各  $z_i$  は複素平面上で無秩序に偏角を変える確率変数となる。このような確率変数の和としての  $Z(\omega)$  を考察することは、複素平面上の random walk (酔歩の問題)<sup>2)~4)</sup> の問題を考察することと等価である。こうしてカエルの音量計測は2次元の酔歩の問題に帰着される。

繰返し計測による平均を  $\langle \dots \rangle$  で記すと、酔歩の問題の一般論の結果を援用して

$$\langle P(\text{電気})^2 \rangle = \sum_i \int_{-\infty}^{\infty} I_i(\omega)^2 |p_i(\omega)|^2 d\omega \quad (12)$$

を得る。ここで

$$I_i(\omega) = \frac{1 + \sqrt{t_r}}{r_i} f(\theta_i) e^{-r'\omega^2 r_i} \quad (13)$$

である。 $p_i(\omega)$  はカエルの特徴的な角周波数  $\omega_0$  でピークをもつ。 $|p_i(\omega)|^2$  は  $p_i(\omega)$  よりも鋭いピークをもつので、よい近似で(12)を

$$\langle P(\text{電気})^2 \rangle = \sum_i I_i(\omega_0)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |p_i(\omega)|^2 d\omega \quad (14)$$

と因子分解することができる。また、

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_i(\omega)|^2 d\omega = \overline{a_i \cdot p_0(t)^2} \quad (15)$$

であるから最終的に

$$\langle P(\text{電気})^2 \rangle = \langle \bar{\alpha} \rangle \cdot C \cdot n \overline{p_0(t)^2} \quad (16)$$

を得る。ここで  $n$  はカエルの数密度を表し、 $C$  は  $C = n^{-1} \sum_i I_i(\omega_0)^2$  で与えられる定数でカエルの分布密度  $n$  には関係しないが、分布の形、分布の大きさ、マイクロフォンの位置などには関係する。 $\langle \bar{\alpha} \rangle$  は厳密には、 $\bar{\alpha}_i$  の  $I_i(\omega_0)^2$  の重みによる集団平均であるが、近似値として  $\bar{\alpha}_i$  の集団平均を用いる。

以下では簡単のため次の条件の場合について考える。すなわち、カエルは半径  $R$  の円内に一様に分布しているとし、マイクロフォンは円の中心で鉛直上方  $h$  のところに置き、鉛直下向きに向けて録音するものとする。この場合には

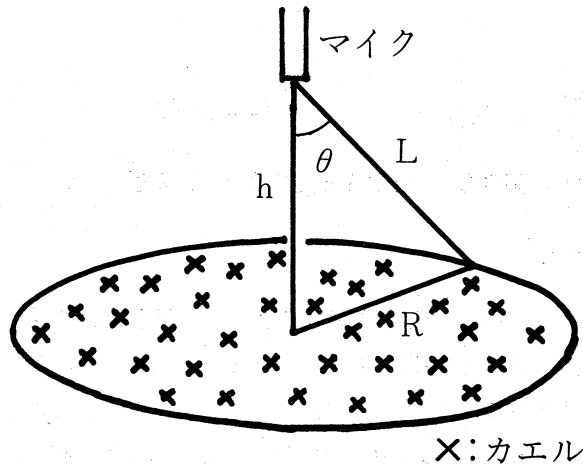


図 3

$$C(h, R) = 2\pi \int_{h/r_0}^{L/r_0} \frac{f^2(\cos^{-1}(hr_0t))}{t} e^{-t} dt \quad (17)$$

となる。ここに  $L = \sqrt{R^2 + h^2}$  であり、 $r_0 = 10^8 / 4f_0^2$  [km] である。特に無指向性、双指向性のマイクロフォンに対しては

$$C = 2\pi \left[ E_1\left(\frac{h}{r_0}\right) - E_1\left(\frac{L}{r_0}\right) \right] \quad (\text{無指向性}) \quad (18)$$

$$C = 2\pi \left(\frac{h}{r_0}\right)^2 \left[ E_3\left(\frac{h}{r_0}\right) - E_3\left(\frac{L}{r_0}\right) \right] \quad (\text{双指向性}) \quad (19)$$

である。ここに、 $E_n(x)$  は指数積分

$$E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt \quad (20)$$

を表す。

#### § 4. カエルの密度, 分布範囲の推定方法

最終結果(16)の両辺に現われる量  $\langle P(\text{電気})^2 \rangle$ ,  $\langle \bar{\alpha} \rangle$ ,  $C$ ,  $n$ ,  $\overline{p_0(t)^2}$  において  $\langle P(\text{電気})^2 \rangle$  は実測する量であり,  $\langle \bar{\alpha} \rangle$ ,  $\overline{p_0(t)^2}$  は実測可能な量である。密度  $n$  および  $C$  の中にある  $R$  が理論的に求めなければならないものである。

$\overline{p_0(t)^2}$  は1匹のカエルについての音量計測により実測できる。 $\langle \bar{\alpha} \rangle$  については, カエルの生態学, 生理学からは簡単に推定できない, 一部のカエルが鳴くことをサボれば  $\langle \bar{\alpha} \rangle$  に大きな影響を与える。全部のカエルがひっきりなしに鳴いていれば  $\bar{\alpha}$  は1匹のカエルがひっきりなしに鳴いている時間的な割合に等しいので実測できる。この値を  $\langle \bar{\alpha} \rangle$  の代りに用いると, カエルの総数の下限を与えることになる。さらに近似を高めるためには, カエルの分布がわかっているもの(このとき  $C$ ,  $n$  は既知である) についての実測から(16)によって  $\langle \bar{\alpha} \rangle$  を求める方法を採用することである。以上により  $C$ ,  $n$  以外は実測ないし推定できることがわかった。

##### 分布範囲 $R$ の求め方

$C$ ,  $n$  のうちいずれか一方がわかれば他方がわかる。ここでは  $R$  の求め方の一方法を提案する。ところでマイクロフォンの高さ  $h$  に関係するのは  $C$  だけである。このことに着目すると次のような方法が考えられる。

$h=h_0, h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$  と変化させて  $\langle P(\text{電気})^2 \rangle$  を実測する。この実測値を  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  とする。このとき, これらの比  $y_1/y_0, y_2/y_0, \dots, y_n/y_0$  は一意に決まり, しかも(17)が厳密に成立するものとすればその値は

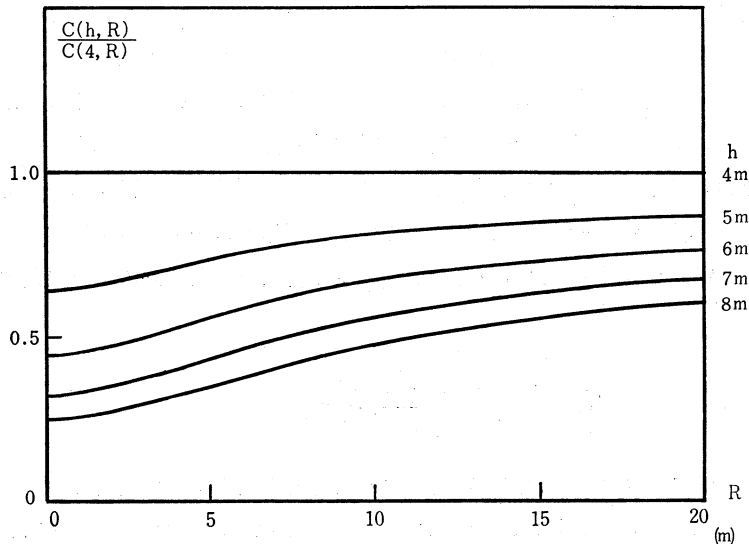


図 4

$$\frac{y_n}{y_0} = \frac{C(h_n, R)}{C(h_0, R)} \quad (22)$$

に等しくならねばならない。しかし、 $n=1, 2, \dots$  のすべてに対して(22)を満たす  $R$  は一意に決まらない。そこで一例として  $R$  の最適値を決定するための方法は最小自乗法を適用することである。すなわち最適の  $R$  は

$$\sum_n \left[ \frac{y_n}{y_0} - \frac{C(h_n, R)}{C(h_0, R)} \right]^2$$

を最小にすることによって得られる。

集音器装着のためマイクロフォンの指向性  $f(\theta)$  は実測値を用いなければならないので、一般に  $C(h, R)$  は数値積分によって求めるほかはない。一例として無指向性マイクロフォンの場合で  $h_0=4\text{m}$ ,  $h=4, 5, 6, 7, 8\text{m}$  の各々について  $C(h, R)/C(h_0, R)$  を図4に示した。

以上の方法で  $R$  が求まると(17)からカエルの数密度  $n$  あるいは総数  $N=\pi R^2 n$  が求まる。

## §5. 議 論

この節では最終結果(16)を得るまでに導入した諸仮定、諸近似についての検討をする。

まず、カエルを点音源とみなす仮定1. について検討を始める。どんな発音体でも十分遠方では点音源とみなせ、遠方での波は球面波となる。この条件を定量的に表現すれば、すべての  $i$  について  $r_i \gg d(SS'/2)$  となる。カエルから数m以上離れての計測はこの条件を満たしている。反射係数についての仮定2. は妥当なものであるが、均質な平面でない限り  $t_r$  を理論的に定めることは困難である。水田で鳴いている場合には水の反射係数がほとんど1であることがわかっているが、水の入っていない田、草むらといったところでは  $t_r$  を実験的に定めるよりない。仮定3. も理論的簡単のためには止むを得ない要請であるが、カエルの成熟度、個体差などがどの程度、鳴き声の周波数成分に影響するかについては実測により確認しておく必要がある。

次に、同じカエルによる直達波と反射波の可干渉性の度合いについて論ずる。この問題は音量に大きい影響を与えるので特に重要である。すなわち、可干渉性か否かによって音量にかかるとの因子が  $(1+\sqrt{t_r})^2$  か  $(1+t_r)$  かの相違が生ずる。同じカエルによる直達波と反射波とが可干渉性でなければ、これは単にカエルとそのカエルの鏡像の2個のカエルが生息することと等価なので(17)は

$$C = 2\pi(1+\sqrt{t_r}) \int_{h/r_0}^{L/r_0} \frac{f^2 \cos^{-1}(h/r_0 t)}{t} e^{-t} dt$$

と変更しなければならない。本論文では直達波と反射波の位相は計測位置では同じとしたので(17)を得た。 $t_r \cong 0$  の場合では両者に差はないが、 $t_r \cong 1$  では  $C$  にすなわち音量に2倍の差が生ずる。直達波と反射波が可干渉性か否かは、マイクロフォンの位置とカエル及びカエルの鏡像との距離の差が音波の波長に比べて十分小さいか否かによる。本論文では 1000Hz でこの距離



の差は波長の1割程度であったので可干渉性であるとみなした。

本研究では、カエルの分布密度、分布範囲を推定するために、カエルの平面分布として円領域を仮定したり、計測位置をカエルの分布の中心の鉛直上方に設置するなどの単純化をした。これは理論的な議論をするために行ったのであるが、このような単純化をしても推定方法の本質は失なわれない。最小自乗法による分布範囲  $R$  の推定では、 $R$  の大きい場合にはそれに比例して計測位置の高さ  $h$  も大きくしなければ  $R$  の推定の誤差は大きくなる。図4から明らかのように  $C(h, R)/C(h_0, R)$  は  $R$  が大きくなるにしたがって一定値に近づくからである。

この論文では  $\langle P(\text{電気})^2 \rangle$  を音量と呼んだが、普通音圧レベルとして計測されているのは、 $\langle P(\text{電気}) \rangle$  である。この両者は  $P(\text{電気})$  が任意の波形をしている場合には何ら一定の関係を有しないが、正弦波の場合には一定の関係があるのでこの場合には本質的な相違はない。

多種類のカエルが混在している場合についての結果は本論文の結果を拡張することができて、その結果は

$$\langle P(\text{電気})^2 \rangle = \sum_l C_l \langle \bar{a}_l \rangle \cdot n_l \cdot \overline{p_l(t)^2}$$

である。 $l$  はカエルの種類を示す添字である。この場合でも混在しているカエルの特徴的な周波数帯が大きく分離していれば、それぞれの周波数帯を通すフィルターにかけて音量を分離することができる。

最後に音量計測の応用として、セミ、スズメ（時に群集でさえることがある）などの個体数の推定などが考えられる。これらは一般に平面ではなくて空間的に分布するのでさらに難しい問題である。

#### § A. 付録 酔歩の問題の一般論<sup>2)~4)</sup>

$$z_i = |z_i| e^{j\phi_i} = x_i + jy_i$$

に対する分布密度を  $f_i(x_i, y_i)$  とし、その特性関数を  $x_i(s, t)$  とする。すなわち

$$f_i(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(sx+ty)} x_i(s, t) ds dt \quad (\text{A } 1)$$

である。このとき  $Z = \sum_{i=1}^N z_i = X + jY$  に対する分布密度を  $F(X, Y)$  とすると

$$F(X, Y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-j(sx+tr)} x_1(s, t) x_2(s, t) \cdots x_N(s, t) ds dt \quad (\text{A } 2)$$

である。計測中、カエルが動きまわらなければ

$$f_i(x, y) = \frac{1}{2\pi |z_i|} \delta(\sqrt{x^2+y^2} - |z_i|) \quad (\text{A } 3)$$

である。ここに  $\delta(x)$  はディラックのデルタ関数である。したがって

$$z_i(s, t) = J_0(z_i \sqrt{s^2 + t^2}) \quad (\text{A } 4)$$

となる。ここに  $J_0(z)$  は

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jz \sin \theta} d\theta \quad (\text{A } 5)$$

で与えられる 0 次のベッセル関数である。このとき

$$F(X, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt J_0(z_1 t) J_0(z_2 t) \cdots J_0(z_N t) J_0(z t) \quad (\text{A } 6)$$

を得る。0 次のベッセル関数は減衰振動型なので  $N \gg 1$  のとき、相乗積  $J_0(z_1 t) J_0(z_2 t) \cdots J_0(z_N t)$  は  $t=0$  で鋭いピークをもつ  $\delta$  関数に似た形をとる。このとき積分 (A 6) の主要部は  $t=0$  近傍で与えられる。各  $J_0(z_i t)$  を  $t=0$  で展開し

$$J_0(z_i t) = \exp\left(-\frac{|z_i|^2}{4} t^2\right) \left[1 - \frac{|z_i|^4}{16} t^4 - \frac{|z_i|^6}{72} t^6 \cdots\right] \quad (\text{A } 7)$$

積分公式

$$\int_0^\infty J_0(rt) e^{-at^2} t dt = \frac{1}{2a} e^{-\frac{r^2}{4a}} \quad (\text{A } 8)$$

を援用すると

$$F(X, Y) = \left[\sum_i |z_i|^2\right]^{-1} \exp\left[-|Z|^2 / \sum_i |z_i|^2\right] \quad (\text{A } 9)$$

を得る。(A 9) による  $|Z|^2$  の平均値  $\langle |Z|^2 \rangle$  は

$$\langle |Z|^2 \rangle = \sum_i |z_i|^2 \quad (\text{A } 10)$$

となる。

#### 参 考 文 献

- 1) 國末, 虫明, 近藤, 高田: カエルの鳴き声の音量計測によるカエルの個体数の推定方法, 川崎医学会誌 一般教養篇 第5号 (1979) 33.
- 2) L. Rayleigh: *On the Problem of Random Vibrations, and of Random Flight in one, two or three Dimensions*, Phil. Mag., 37 (1919) 321.
- 3) G. N. Watson: *A treatise on the theory of Bessel functions* (Cambridge University Press, New York, 1922) p 419.
- 4) 伏見康治: 確率論及統計論 (現代工学社, 東京, 初版昭和17年, 復刻版昭和52年) p 211.