帰納と類比

川崎医科大学物理学教室
近　藤　芳　朗

(昭和63年10月13日受理)

Induction and Analogy

Yoshiro KONDO
Department of Physics, Kawasaki Medical School
Kurashiki, 701-01, Japan

(*Received on Oct. 13, 1988*)

概　　要

問題解決の方法の帰納的研究のために，帰納と類比によって解ける新しい例題を４つ提出する。第１の例題は等周問題の一つである「一般化されたディドーの問題」で，これは膜の釣り合いの類比によって解かれる。第２は「３本のクイに内接する最大の正三角形」を求める問題で初等幾何学の問題であるが，これも力学的整合という興味ある物理的解釈によって解かれる。第３は「一般化された誕生日の問題」で古典的な誕生日の問題を一般化したもので，部分変化の方法によって代数的に解かれる。最後は「扇形の重心」を求める問題で，これは分割，総合の方法によって積分に頼らないで求まる。

Abstract

Four new examples which can be solved by induction and analogy are introduced for inductive research into ways of solving problems. The first is a generalized Dido's problem, and is solved by analogy with the equilibrium of a membrane. The second is a problem involving a triangle with its maximum area inscribed within three given poles, and is solved by physical interpretation with mechanical matching. The third is a generalized problem of birthdays, and is solved algebraically by the method of partial variation. The last example is a problem concerning the center of gravity of a sector, and is solved by the method of analysis and synthesis without resort to integral calculus.

§1．はじめに

発明や発見をしたり，よい発想や着想を得る一般的な方法がないのは幾何学に王道がないのと同じである。ポリアはこの困難な問題すなわち，発見学あるいは問題解決の方法の研究に挑戦し，帰納（*induction*）と類比（*analogy*）が数学においても有効であることを種々の例でもって示した。[1] オイラーは数学においても観測が重要であることを強調した稀な大数学者であっ

て，多くの定理を発見するのに帰納を利用した。[2] 数学においてかくの如くであるから自然科学においてはなおさら帰納と類比あるいは観察は本質的に重要な役割を果たす。

今日，プレート・テクトニスクによって基礎づけられている大陸移動説は疑いのない確固たる不動の地位を得ているが，その昔（1915年），ウェゲナーが大陸移動説を提出したとき，誰もウェゲナーの説を信じなかった。そのとき，日本ではいち早くその重大性に気づいた寺田寅彦は大陸移動説の啓蒙にあたったという。世界地図を見れば，誰でも一度は南アメリカ大陸の出っ張りとアフリカ大陸のへこみの幾何学的類似性に気づくものだが，ウェゲナーもやはりそうだったのだ。彼の著書である『大陸と海洋の起源』[3] の冒頭，第１章，第１節にそのことを次のように述べている。

“ 第１章　歴史的序論

１．私の大陸移動説の起源と発見

本書が生まれた事情に対して，読者は多少の興味をもたれるかも知れない。大陸移動という観念を私がはじめて思いついたのは，1910年のことであった。それは世界地図を見て，大西洋の西岸の海岸線の凹凸がよく合致するのに気がついた時であった。はじめ私は，この観念に注意しなかった。なぜなら，それはとても本当とは思えなかったからである。1911年の秋になって，全く偶然にある総合報告を読んで，昔ブラジルとアフリカの間に陸地のつながりがあったということを示す古生物学上の証拠をはじめて知るようになった。そこで私は，地質学上と古生物学上におけるその問題に関係ある研究をすこし調べてみた。すると直ちに，その考えを強く支持する証拠があることがわかった。そこでその考えは基本的に正しいのだと強く信ずるようになった。……　”

（ウェゲナー著，都城秋穂，柴藤文子訳『大陸と海洋の起源』より）

ウェゲナー自身も述べているように大陸移動説を唱えた人は彼が初めてではなかったのである。しかしながら，ウェゲナーは先人のホラと違って，ありとあらゆる証拠を探し，議論を展開した。すなわち，測地学的，地球物理学的，地質学的，古生物学的，古気象学的な議論を展開し，はては大陸を動かす力にまで言及しているのである。これは，世界地図をみてのほんの小さな幾何学的類比が大きな発見につながった一例である。

江戸時代の和算家は西洋との交流が全く閉ざされていたにもかかわらず，高度な発想に達していた。その源泉は忍耐強い計算と卓抜な洞察力であったが，それの論証的基礎づけはなかた。建部賢弘（1664－1739）は帰納と類比によって，今日いうところのロンバーグ算法という加速の概念に達していた。彼はこの方法を用い円周率を小数第40位まで正しく求めた。[4] 彼の用いたデータは村松茂清および村瀬義益の計算した直径１の円に内接した正多角形の周長であった。村松は正2^{15}角形までの周長を，村瀬は正2^{17}角形の周長を計算したのであった。村瀬の求めた内接正2^{17}角形の周長でさえ円周率と小数第９位までしか一致していないのである。こ

のような粗いデータばかりを使いながらも加速によって円周率の精度を4倍以上に高めたのである。これは全く驚異という他ない。建部はまた，精密な計算と鋭い洞察力によって，今日の $(\arcsin x)^2$ の巾級数展開と一致するものをも得ていたのである。[(4),(5)]

和算家がこのような高い境地に達していながら，系統的な数学の発展につながらなかったのは論理的推論の欠如が原因といっても過言ではあるまい。あるいは特殊な問題に対しての発見的推論の魅力に捕らわれ過ぎたためかも知れない。和算家のこの状況を考えるとき，学問の発展には発見的推論ばかりでなく，それに釣り合った論証的推論が必要であることを痛感させられる。

以上は帰納と類比による大きな発見の物語であったが，この論文では帰納と類比による小さな小さな発見の物語について語る。それは，ポアリがいみじくも述べているように帰納を帰納的に研究する以上でも重要だからであり，また，初学者に対する考える力，発見する力の養成の一助にもなり得ると考えるからである。

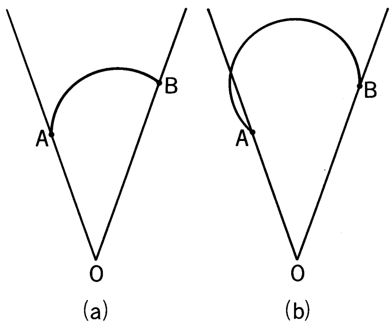
§2．一般化されたディドーの問題　―― 物理的類比による解法 ――

最初の問題は次のように述べられる。

一般化されたディドーの問題

> 一つの角およびこの角の各辺上に一つずつ，2点が与えられている。与えられた長さの曲線で与えられた2点を結ぶとき，このような曲線によって角から切り取られる最大面積を求めよ。

これはポリアの著書にも載っている問題[(1)]であってポリアは等周定理「等しい周囲のすべての平面図形の中で円は最大の面積をもつ」に基づいて次の解を与えた。「与えられた曲線が円弧をなすとき最大面積となる。」

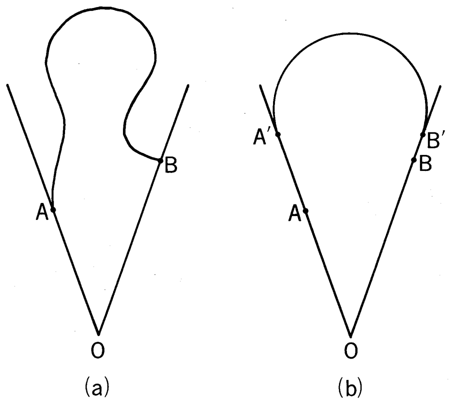


第1図　一般化されたディドーの問題

(a) 曲線の長さが短いと円弧が解である。
(b) 曲線の長さが長いと円弧は辺からはみ出す。

このポリアの解は曲線の長さが短いときには確かに正しい。しかし，曲線の長さが極端に長い場合には円孤は角の辺からはみ出してしまう。したがって，ポリアの解は完全ではないことがわかる。曲線の長さが極端に長い場合，等周定理から，曲線の一部は辺に接していなければならず，残りの曲線部分は円孤でなければならないということが導かれる。しかし，どの程度の長さだけ辺と接したらよいのかそれが問題なのである。

この問題を物理的類比によって解くために，次の様な設定をする。角の頂点をOとし辺上の二つの固定点をA，Bとする。二つの角の辺は鉛直方向に伸びた無限に長い壁の断面であるとし，曲線ABはこれも鉛直方向に伸びた無限に長い一様な膜の断面であるとする。また，この膜と壁との間に摩擦力は働かないものとし，膜は非常に柔らかく，かつ全く伸びないものとする。



第2図　膜の張力と圧力による類比
(a) 領域OAB内部の圧力を高めると膜ABは膨張する。
(b) 膜が緊張し最大面積の状態となる。A′，B′で滑らかに接する。

このように設定した上で，領域OABの内部に気体を送り込み内部の圧力を高める。すると，たるんだ膜は次第に膨らんでゆき，ついには膜全体が緊張状態になる。このとき，膜と壁によって囲まれた部分の断面積は最大になっていて膜は力の釣り合いの状態にある。というのは，もし，最大になっていなければ内部の圧力は断面積が最大になるまで仕事をすることが出来るからである。そこで，膜の張力をT，膜の内外の圧力差をΔP，膜の曲率半径をRとすれば，膜の力の釣り合いから，次のラプラスの式

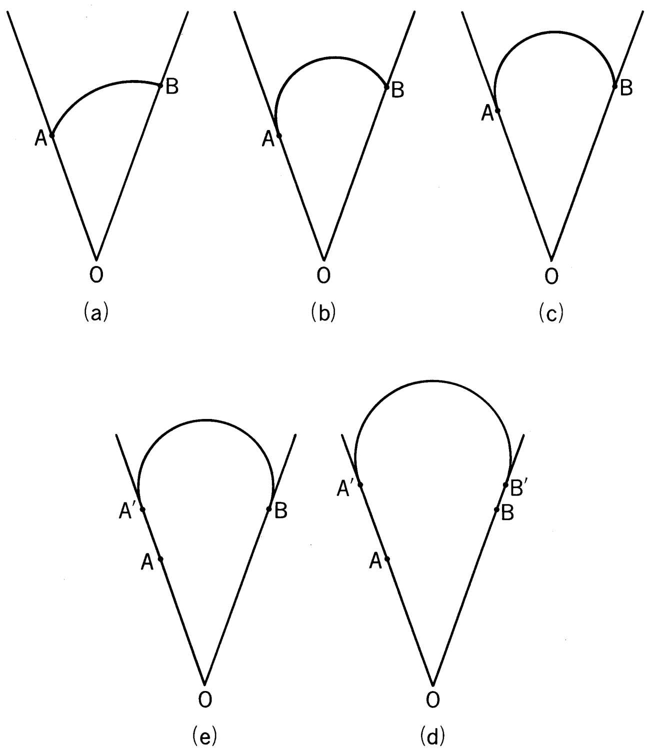
$$\Delta P = \frac{T}{R} \tag{1}$$

が成り立つ。膜の任意の点でΔP，Tは一定であるので，ラプラスの式から曲率半径Rは一定でなければならない。すなわち，膜の曲線部分は円孤でなければならない。膜が辺から離れる点を剥離点と呼び，この点において辺と曲線部分のなす角を接触角と呼ぶ。剥離点における辺からの抗力は常に辺に垂直にしか作用しないので，力の釣り合いが成立するためには接触角は

0でなければならない。一方，固定点A, Bでは，抗力はどんな方向にも作用し得るので接触角は必ずしも0でなくてよい。こうして，曲線の長さに応じて次の4種類の解が存在することになる。

〈解の分類〉

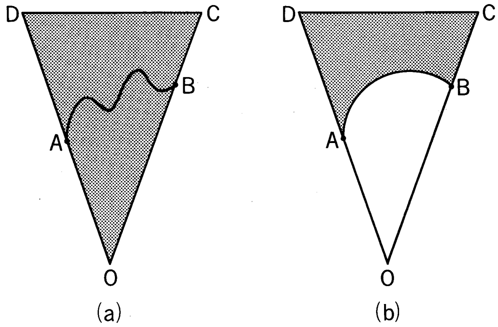
点A，Bを与えられた固定点とし，曲線ABの長さをlとする。lが小さい時はABを弦とする円孤は角の辺にはみださないのでこれが面積最大となる。(第3図(a)) 次第にlを大きくするとついには点Aでの接触角とが0となり(第3図(b))，さらにlを大きくすると円孤は辺にはみ出す。このときは，一部が辺に接し辺から離れる点で接触角が0となるもとのが面積最大となる。(第3図(c)) このような状況で，さらにlを大きくすると，今度は点Bでの接触角が0となる。(第3図(d)) さらにlを大きくするともう一つの辺も一部が接し，対称的な点が剝離点となり，そこで接触角0の円孤が求める解となる。(第3図(e))



第3図　解の種類
曲線の長さが長くなるにしたがって，解は(a)，(b)，(c)，(d)，(e)と変化していく。
A′，B′は剝離点である。

この問題はまた，表面張力の類比によっても解くことができる。第4図(a)のように石鹸膜を張り，その中に固定点A, Bを一定の長さの細いひもで結ぶ。次に領域OABの内部の膜をついて破れば，石鹸膜で覆われたABCDの部分は面積が最小となる形をとる。というのは，

表面張力が存在する場合には，表面エネルギーが最小になろうとするため ABCD の部分の面積が最小となるのである。この結果，曲線 AB と角で囲まれた部分の面積は最大となる。表面張力の作用下での釣り合いの式も当然，ラプラスの式を満たす。この場合，T は表面張力である。



第4図　表面張力による類比
(a)の状態でO A B の部分を破ると(b)の状態になる。
石鹸膜のないO A B の部分の面積は最大となる。

以上の結果は，当然のことながら解析的な計算によっても導出できる。その計算たるや非常に冗長なもので，結果を直観的に理解することは困難である。それに引き替え，物理的類比による解法では，剥離点において接触角が 0 とならねばならない理由が一目でわかる。厳密な証明は，勿論，解析的なものでなければならないが，この方法によって結果を得るにも，発見的方法によって結果を得た上で計算すると大変楽である。いずれにしても，この物理的解釈による発見的推論は直観的な理解のためにも，厳密な証明に対しても有効な役割を演ずる。

§3．３本のクイに内接する最大の正三角形の問題　―― 物理的類比による解法 ――

次の問題は中村義作が雑誌「科学朝日」1984年のお年玉つき新春パズル[6]として出題したものである。また，同じ著書の単行本『スーパー・パズル』[7] にも収録されている。問題は次のように述べられる。

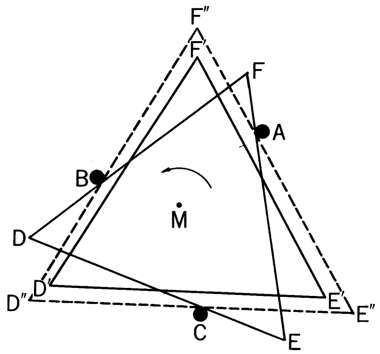
３本のクイに内接する最大の正三角形の問題

> イモ畑の中にA点，B点，C点に一本づつクイが打ってある。三本のクイを３つの辺上にもつような正三角形のうちで，最大のものを見つけよ。

この問題は純粋に初等幾何学のものであって中村義作の解答もこの線に沿ったものである。しかし，これでは面白くもなんともない。ここでは高田和郎（川崎医大・物理学教室）の発想に基づいて著者の得た解法をおめにかけよう。

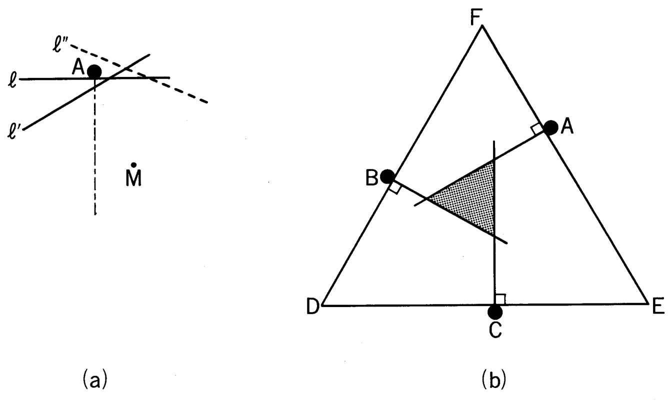
〈高田の発想〉

いま，第5図のように点A, B, Cを通る一つの正三角形ΔDEF について考える。もし，これが最大の正三角形でなければΔABC の内部の適当な点Mを中心として，この正三角形を右か左回りに回転させることができ，その結果得られるΔD′E′F′ と点 A, B, C との間に隙間ができるはずである。すると，点 A, B, C を通るもっと大きい正三角形ΔD″E″F″ が得られる。したがって，点 A, B, C を通る最大の正三角形はΔABC の内部のどんな点を中心にしてもクイ A, B, C がつっかえて回転できないようなものでなければならない。



第5図　3本のクイに内接する最大の正三角形の問題
点Mを中心として，△DEF を反時計方向に回転させると△D′E′F′ になる。この結果，△D′E′F′ とクイA，B，Cとの間には隙間ができるのでもっと大きい正三角形△D″E″F″ が描ける。

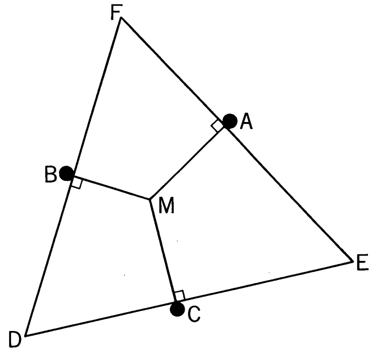
というのが高田の発想なのである。この発想によれば次のことが基礎となる。すなわち，第6図(a)のようにクイAに直線 l が接している場合，点Aにおける直線 l の法線より右下の任意



第6図　力学的整合条件
(a) Mを中心に ℓ を反時計方向に回転させると ℓ' になり，ℓ' とクイAとの間に隙間ができる。ℓ を時計方向に回転させようとするとクイAが邪魔をして ℓ'' の状態になれない。
(b) この図の場合，影を施した部分の任意の点を中心にして反時計方向に△DEF を回転させることができる。

の点Mを中心にして直線 l を，時計方向に回転させようとしてもクイAにつっかえて回転できないが(l'')，時計方向には回転でき(l')，直線とクイの間に隙間ができるようになる。反対に点Mが法線に対して左下にあるときは，時計方向に回転させることによって直線とクイの間に隙間ができる。点A, B, C を通る任意の正三角形を ΔDEF とし，この正三角形の各辺に対して点A, B, C を通る垂線を引く。この三つの垂線によって囲まれた領域が第6図(b)の影を施した部分である。この様な領域が存在すれば，三つのクイA, B, C につっかえることなくこの領域内の任意の点を中心に正三角形 ΔDEF を時計回りか反時計まわりのどちらかに回転させることができる。第6図(b)の場合は反時計回りに回転できる。すなわち，影の部分が存在する場合には正三角形 ΔDEF は最大ではあり得ない。このことから，正三角形 ΔDEF が最大となるためには影の部分が存在しないこと，すなわち，これが一点になることが必要である。こうして，三つの垂線が一点で交わる場合に正三角形 ΔDEF は最大となることがわかる。

第7図のように点A, B, C における垂線の交点をMとすれば，線分 MA, MB, MC は互いに120° の角をなす。それ故，点Aは，線分 AB, BC, CA を見込む角が120° の円弧をそれぞれ描き，これら三つの円弧の交点として求められる。こうして得たM点に対して線分 MA, MB, MC に垂直な直線を描けば，これら三直線の交点から作られる三角形が求める最大の正三角形となるのである。



第7図　最大の正三角形
垂線が一点Mで交わる時△DEFは最大となる。

以上の解法はどのような状況になったら，ΔDEF の面積が最大になるかが直観的にわかるものである。幾何学的の方法は理詰めで厳密ではあるが直観に乏しい。

§4．一般化された誕生日の問題 —— 部分変化の方法 ——

部分変化の方法というのは偏微分の代数化であって，いくつかの変数があるとき1つまたは2つの変数だけを変化させ，残りの変数を固定して考える方法である。この方法によって「一般化された誕生日の問題」が解かれる。問題は次のように述べられ，仮谷太一（川崎医大・名誉教授，現川崎医療短大）著の『統計と確率なるほどゼミナール』[8] で論ぜられているが厳密な証明は与えられていない。

一般化された誕生日の問題

一年を1月1日から勘定して第 i 日目に生まれる確率を p_i とする。このとき n 人のグループにおいて少なくとも2人の誕生日の一致する確率は p_n はどのような場合に最小となるか。

当然のことながら全確率は1であるから，誕生日の確率 p_i は次の束縛条件

$$p_1 + p_2 + \cdot\cdot\cdot + p_n = 1 \qquad , \qquad N = 365 \tag{2}$$

を満たさなければならない。グループ内のどの2人も誕生日の一致しない確率を Q_n とすると，Q_n は

$$Q_n = n! \sum_{\{i_1\, i_2 \cdots i_n\}} p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_n} \tag{3}$$

で与えられる。ここで，$\{i_1\, i_{2,} \cdots i_n\}$ は $\{1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ から重複を許さないで n 個取り出した組合わせであり，和はこれらの可能な組合わせすべてについて取るものとする。和の前の $n!$ は，与えられた n 個の誕生日を n 人が占める場合の数であり，いずれの場合にも同じ確率 $\mathrm{p}_{i_1}\,\mathrm{p}_{i_2} \cdots \mathrm{p}_{i_n}$ を与えることから出てくる因子である。また，

$$P_n = 1 - Q_n \tag{4}$$

であるから，P_n についての最小問題は Q_n についても最大問題に変換される。変数 Q_n は $p_1\, p_2$，$\cdots$，p_N についての対称関数であり，任意の二つの変数 p_i，p_j について次の形をしている。

$$Q_n = a_{ij}\, p_i p_j + b_{ij}\,(p_i + p_j) + c_{ij} \tag{5}$$

ここに，a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} は p_1, p_2，$\cdots$，p_N から p_i, p_j を除いた変数についての対称関数である。

変数 p_1, p_2，$\cdots$，p_N において，すべてが $1/N$ に等しいということはないとする。すなわち，少なくとも2つは $1/N$ 等しくはなく，したがって，そのうち少なくとも1つは $1/N$ より大きく，そのうち少なくとも1つは $1/N$ より小さいものが存在する。そのような変数の小さい方を p_i，大きい方 p_j とする。残りの変数はその値を固定する。いま，p_i を変化させて $p'_i = 1/N$ とし，同時に p_j も変化させ p_i と p_j の和は不変であるようにする。つまり，p_j を変化させた値 p'_j は

$$p'_i = 1/N \tag{6}$$

$$p'_i + p'_j = p_i + p_j \tag{7}$$

として得られる。簡単な計算から

$$p'_i\, p'_j > p_i\, p_j \tag{8}$$

が示せるので，これから

$$Q_n(p_1,\ \cdots,\ p'_i,\ \cdots,\ p'_j,\ \cdots,\ \cdots,\ p_N) > Q_n(p_1,\ \cdots,\ p_i,\ \cdots,\ p_j,\ \cdots,\ p_N) \tag{9}$$

であることがわかる。このことは $\{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N\}$ のうちで $1/N$ に等しくないものがあれば，今述べた手続きによって，それらのうち１番小さいものを $1/N$ に等しくすることによって Q_n の値を増加させることができるということを意味する。このような操作はすべての変数 $\{p_1,\ p_2,\ \cdots p_N\}$ が $1/N$ に等しくなるまで続けることができるので，その結果，

$$Q_n\left(\frac{1}{N},\ \frac{1}{N},\ \cdots,\ \frac{1}{N}\right) \geqq Q_n(p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_N) \tag{10}$$

を得る。すなわち，すべての p_i $(i=1,2,\ \cdots N)$ が $1/N$ に等しい時 Q_n は最大となる。言い換えれば，すべての誕生日の確率が等しい場合に，少なくとも２人の誕生日の一致する確率 P_n は最も小さくなるということがわかるのである。

この問題の結果はほとんど直観的に明らかであるが，その証明は簡単ではない。解析的な証明において Q_n の極大性を厳密に示すのは大変なのであるが，部分変化の方法によれば変数を１つずつ $1/N$ に等しくすることによって Q_n が増加し続け，ついには極大になるという様子が手にとるようにわかる。

§5．扇形の重心　—— 分割・総合の方法 ——

「難問に出くわした時，困難を分割して処理し，しかるのちに総合して問題を解決せよ」という意味のことがデカルトの『方法序説』[9][10] に述べられている。これに似た方法で扇形の重心が求まるので紹介する。以下に述べる方法は，1980年正月に小村武彦（川崎医療短大，放射線科学生，当時）によって発想されたものを著者が改良したものである。

扇形の重心

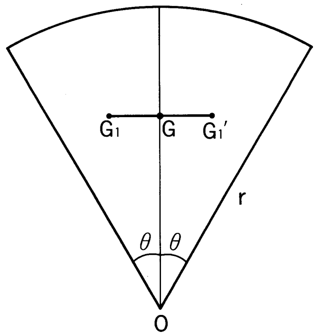
半径r，時心角 2θ の重心を求めよ。

〈小村・近藤の方法〉

扉形の頂点をO，重心をGとする。直線 OG によってもとの扇形は２つの合同な扇形に分割される。分割された扇形の重心をそれぞれ G_1, G'_1 とすると，明らかに２点 G_1 と G'_1 の中点がGである。このことから，

$$\mathrm{OG} = \mathrm{OG_1}\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{11}$$

が成立する。（第８図参照）この関係式は θ のいかなる値に対しても成立する。扇形の頂角を半分，半分にしてゆくと，k 回目の段階で頂角が $\theta/2^{k-1}$ $(k=0,1,2,\ \cdots,)$ の扇形ができる。この重心を G_k とすると，(11)式を得たのと同様にして漸化式



第8図　扇形の重心
G 1，G 1′の中心がGである。

$$OG_k = OG_{k+1}\,cos\left(\frac{\theta}{2^{k+1}}\right) \qquad (k=0,1,2,\ \cdots) \tag{12}$$

が得られる。ただし，$G = G_0$である。この漸化式を繰り返し用いることによって

$$OG_k = OG_n \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^{k}}\right) \tag{13}$$

が得られるが，上式は$n\to\infty$としても成立するので

$$\begin{aligned} OG_k &= \lim_{n\to\infty}\left[OG_n \prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^{k}}\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} OG_n \cdot \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^{k}}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

となる。ところで，$n\to\infty$のとき，頂角$\theta/2^n$の扇形は頂角$\theta/2^n$の二等辺三角形に限りなく近づくので

$$\lim_{n\to\infty} OG_n = \frac{2}{3}r \tag{15}$$

である。また，オイラーの公式

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} cos\left(\frac{\theta}{2^{k}}\right) = \frac{sin\,\theta}{\theta} \tag{16}$$

を援用すると，(14)，(15)，(16)式から扇形の重心として

$$OG = \frac{2}{3}r\frac{sin\,\theta}{\theta} \tag{17}$$

が得られる。

この結果は，重心に対する積分公式を直接実行することによって容易に求められる。しかし，ここでの方法は積分を用いないで初等的な方法で扇形の重心が求まるのである。

§6．結　び

論証的推論が本質的に新しい知識を生み出すことができなのにたいして，発見的推論は新しい事柄についても言及できるという長所がある。しかしながら，論証的推論が完全で最終的な

もので争う余地がないのにたいして，発見的推論は危険で暫定的なもので争う余地があるという短所がある。したがって，帰納や類比による発見的推論が常に成功するとは限らない。ここでは，フェルマーの最終定理における古今の失敗例を取り上げて結びとする。

フェルマーの最終定理

nを3以上の自然数とするとき，方程式

$$x^n + y^n = z^n$$

は$x, y, z \neq 0$なる整数解をもたない。

オイラーは素因数分解の一意性が$a + b\sqrt{-3}$（a，bは整数）という形の数にも適用できると仮定してフェルマーの最終定理を$n = 3$の場合に証明した。[11] 宮岡洋一（都立大，1988年3月[12],[13]）は幾何学的結果の代数学的類比による仮定[14],[15]のもとで非常に大きいnに対してフェルマーの最終定理を証明した。オイラーの場合も宮岡の場合も共に理論の基礎をなす仮定が正統づけられないものであった。そういうわけでフェルマーの最終定理はいまだに完全には解かれていない。しかし，部分的には解かれていて，コンピュータを使って$n \leqq 150000$ならばフェルマーの最終定理は厳密に成立することが示されている。[14],[15]

発見的推論によると失敗も当然生じてくる。また，成功する場合でも，本当にそれが正当であるかどうかは厳格な論理によって確かめなければならない。しかし，「発見的推論を有効に用いることは，問題解決において本質的役割を演ずる。」ということは特に強調されてよい。

参考文献

(1) ポリア著/柴垣和三雄訳：『数学における発見はいかになされるか1』帰納と類比，丸善（1959）
(2) オイラー：純粋数学における観測利用の例，オイラー全集（シリーズ），第2巻，p 459
(3) ウェゲナー著/都城秋穂，柴藤文子訳：『大陸と海洋の起源』上，下，岩波文庫（1981），p 11，ウェゲナー著/竹内　均訳：『大陸と海洋の起源』，講談社（1975），p 11
(4) 村田　全：『日本の数学　西洋の数学』，中公新書（1981），pp 132-142
(5) 小倉金之助：『日本の数学』，岩波新書（1940），pp 54-57
(6) 中村義作：お年玉つき新春パズル，第2問，科学朝日，1984年1月号，P 105戊科学朝日，1984年3月号，pp 78-79
(7) 中村義作：『スーパーパズル』，講談社（1986），第93問
(8) 仮谷太一：『統計と確率　なるほどゼミナール』，日本実業出版社（1983），pp 71-74
(9) デカルト著/落合太郎訳：『方法序説』，岩波文庫（1953），pp 29-30
(10) 遠山　啓：『現代数学対話』，岩波新書（1967），第1日　分析と総合
(11) エドワーズ：フェルマの最終定理，サイエンス，8巻（1978），12月号，pp 52-63
(12) 浪川幸彦：フェルマー予想が解けた!?，数学セミナー，1988前6月号，pp 7-14
(13) 保阪正康：「$X^n + Y^n = Z^n$」に生涯をかけた男たち，クォーク，1988年7月号，pp 14-17
(14) BARRY A. CIPRA: Fermat's LLast Theorem Remains Unproved, Sience 240巻（1988），7月3日号，pp 1275-1276
(15) 足立恒雄：フェルマーの大定理は解けたか，かがくさろん，vol. 12（1988），No.4，pp 4-5