

複素力学系 $Z_{n+1} = C + \log Z_n$ のフラクタル

川崎医科大学 物理学教室, 岡山大学 理学部 物理学教室*

近藤芳朗・川部 健*

(平成2年11月13日受理)

Fractal of Complex Dynamical System $Z_{n+1} = C + \log Z_n$

Yoshiro KONDO and Takeshi KAWABE*

*Department of Physics, Kawasaki Medical School
Kurashiki, 701-01, Japan*

**Department of Physics, Okayama University
Okayama, 700, Japan*

(Received on November 13, 1990)

概 要

対数関数を含む複素力学系 $Z_{n+1} = C + \log Z_n$ について, その軌道 $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots\}$ の性質を数値解析によって調べ, その結果を画像化した。対数関数の多価性のため, 複素数 Z_n の偏角をある範囲に限定しなければ対数写像は一意に定まらない。このために5つの偏角の範囲を採用した。この結果, パラメータ C と初期値 Z_0 の任意の値に対して, 発散する軌道はなく, ほとんどが固定点か偏角のたたま込みのため生ずる周期点に近づく軌道であり, カオスの挙動を示すものは一次元的写像の場合を除いては存在しない。固定点の領域に対しては, 収束の速さに着目して色付けを行い画像化した。この結果, マンデルブロー集合と充填ジュリア集合にフラクタル構造をもつ模様が発見された。このようにして得た, いくつかの興味あるコンピュータ・グラフィックスを紹介する。

Abstract

A property of an orbit $\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots\}$ of the complex logarithmic map $Z_{n+1} = C + \log(Z_n)$ is studied by numerical analysis. Since the logarithmic function is a multiple valued function, it is necessary to introduce a cut in the complex plane, then the cuts of five kinds are adopted in this note. As a result, it is found that the orbit which leads to a fixed point or some periodic points exists for any value of the parameter C and for any initial value of Z_0 except for the case of one-dimensional map. The domain which consists of fixed points is colored according to the approaching speed to each fixed point, and some interesting computer graphics of the Mandelbrot sets and the Julia sets, which have a fractal structure respectively, are obtained.

§1. はじめに

対数関数を含むある定積分の公式が200年来誤ったまま用いられていたことが、最近、斎藤基彦氏によって指摘された。[1-2] その誤った公式は

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log|\log x|} = 0 \quad (1)$$

というもので、正確な値は -0.154479641320043 である。[3] 著者の1人(川部)はこの積分を拡張して、 n 次対数積分

$$Ln^{(n)} \equiv \int_0^1 \log^{(n)}(x) dx, \quad n \geq 1 \quad (2)$$

$$Ln^{(n)} \equiv \text{p.v.} \int_0^1 \frac{1}{\log^{(n)}(x)} dx, \quad n \leq -1 \quad (3)$$

について詳細に研究した。[3] ここに、 n 次対数関数 $\log^{(n)}(x)$ は

$$\log^{(n)}(x) \equiv \log|\log|\log|\cdots|\log(x)|\cdots|| \quad (4)$$

で与えられる n 個の \log をもつ n 重の対数関数を表わす。その後、著者達はこの被積分関数に着目した。いま、 $x = x_0$ に対する n 次対数関係の値を x_n とすれば、数列 $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ は漸化式

$$x_{n+1} = \log|x_n| \quad (5)$$

によって与えられる。すなわち、漸化式(5)は1つの力学系を定める。我々はこの力学系を一般化して正の数 a に対して1次元力学系

$$x_{n+1} = \log a |x_n| \quad (6)$$

を得た。この1次元力学系ではカオスの存在するなど種々のお面白い性質をもつことがわかった。[4] 著者達はこの系をさらに一般化して、この系の自然な拡張である複素力学系

$$Z_{n+1} = C + \log Z_n \quad (7)$$

を考察するに至った。ここに、パラメータ C および変数 Z_n はいずれも複素数である。

この論文では複素力学系 $Z_{n+1} = C + \log Z_n$ について得られたマンデルブロー集合および充填ジュリア集合などのコンピュータ・グラフィックスを紹介する。

§2. 複素力学系 $Z_{n+1} = C + \log Z_n$

複素力学系(7)において、 Z_n の実部および虚部をそれぞれ X_n, Y_n とし、絶対値と偏角をそれぞれ r_n, θ_n とする。また、パラメータ C の実部および虚部をそれぞれ C_x, C_y によって表わすと

$$Z_n = x_n + i y_n = r_n e^{i \theta_n} \tag{9}$$

$$C = C_x + i C_y \tag{10}$$

である。以下においては複素力学系(7)を単に対数写像と呼ぶ。複素関数 $\log Z_n$ は偏角に 2π の整数倍の任意性をもつ無限多価関数であるので、 Z_n を複素平面上の領域 D_α

$$D_\alpha = \{ \alpha - \pi \leq \theta_n \leq \alpha + \pi \} \tag{11}$$

に限定することによって、 $\log Z_n$ を 1 価正則な関数とすることができる。また、 Z_n を

$$D^* = \{ -\frac{\pi}{2} \leq \theta_n \leq \frac{\pi}{2} \} \tag{12}$$

に限定することも可能である。これは θ_n を $\theta_n = \arctan (Y_n/X_n)$ で与えることにより自然に実現できる。こうして、複素数 Z_n のとり得る領域を D_α あるいは D^* に限定することにより対数写像は一意に定まる。

与えられた初期値 $Z_0 = X_0 + iY_0$ から出発して、領域 D_α あるいは D^* に対して対数写像を繰返し適用することにより定まる複素数列

$$\{Z_0, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots\}$$

を軌道という。一般に複素力学系はその軌道の挙動によって次の 4 つに分類できる。

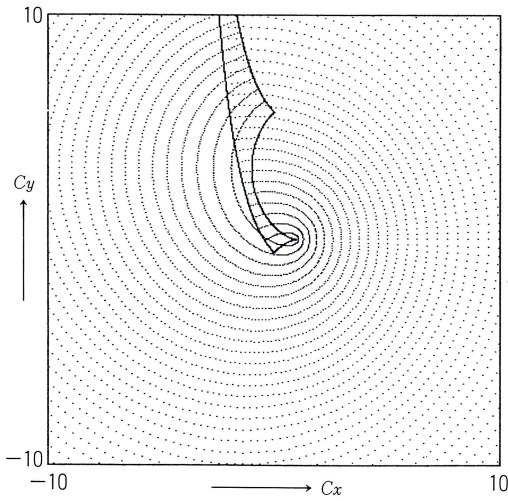
- ① 発散： $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \infty$ となる場合。
- ② 固定点：ある複素数 Z に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = Z$ となる場合。この Z を固定点という。
- ③ 周期点：ある整数 $p \geq 2$ に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{p+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n (=Z)$ が成り立つ場合。上式を満たす最小の p を周期といい、 Z を周期点という。
- ④ カオス： $\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq \infty$ であるが Z_n が固定点でも周期点でもないとき。

対数写像の吸引的な固定点 $Z = r e^{i \theta}$ は方程式 $Z = C + \log Z$ の解として得られ、

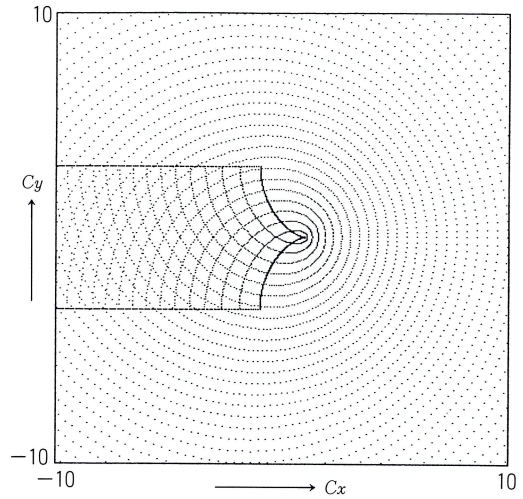
$$\left. \begin{aligned} C_x &= r \cos \theta - \log r \\ C_y &= r \sin \theta - \theta \\ r &> 1 \\ \alpha - \pi &\leq \theta \leq \alpha + \pi \text{ または } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

を満たす。固定点の絶対値 r を一定にして、 θ を変えるとき、点 (C_x, C_y) はトロコイド曲線

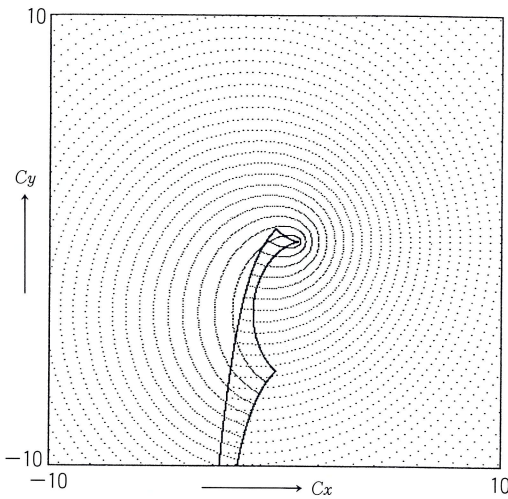
を描く。第1図～第4図は $\alpha = -\pi/2, 0, \pi/2, \pi$ に対する点 (C_x, C_y) を $r > 1$ に対して関係式(13)を用いて描いたものである。破線で表わされるそれぞれの曲線は $r = \text{一定}$ に対応するトロコイド曲線である。第1図～第3図においてはトロコイド曲線の交っている領域が存在する。これらの領域ではパラメータ C の1つの値に対して2つの固定点が存在することになる。また、第4図ではトロコイド曲線が通過しない領域が存在する。次節で述べるようこれらの領域で周期点が現われる。



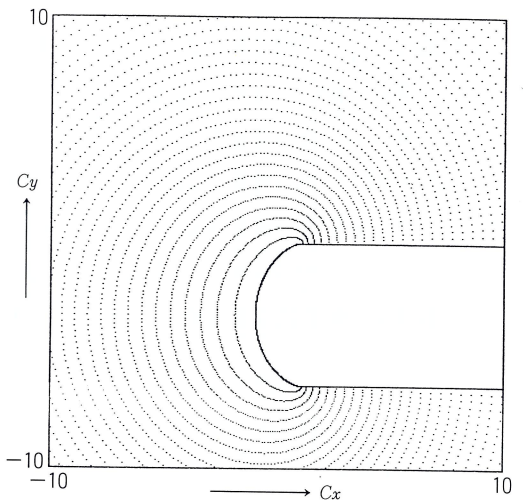
第1図 固定点の存在範囲1
 $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$ の場合



第2図 固定点の存在範囲2
 $-\pi < \theta < \pi$ の場合



第3図 固定点の存在範囲3
 $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ の場合



第4図 固定点の存在範囲4
 $0 < \theta < 2\pi$ の場合

§3. コンピュータ・グラフィックス

この論文では対数写像におけるマンデルブロー集合と充填ジュリア集合のコンピュータ・グラフィックスを写真1～8に紹介する。マンデルブロー集合Mというのは、与えられた初期値 Z_0 に対して軌道が無遠点に行かないときのパラメータ C の集合であり、充填ジュリア集合 J は与えられたパラメータ C に対して軌道が無遠点に行かないときの初期値 Z_0 の集合であると定義する。すなわち、

$$M = \{(C_x, C_y) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq \infty\}$$

$$J = \{(X_0, Y_0) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n \neq \infty\}$$

である。いずれの集合に対しても、 Z_n, Z_{n+1} の実部 X_n, X_{n+1} に対して

$$|X_{n+1} - X_n| < 10^{-5}$$

となる最小の整数 n の値に応じて色を付けている。この n を n_c で表わし収束指数と呼ぶ。使用したコンピュータは富士通のパーソナルコンピュータ FM16β である。どの画像も横 400 ドット、縦 400 ドットの計 16 万点について 8 色のカラーコードで着色してある。1 枚の描画時間は 1 台のコンピュータで 20～50 時間を要するが、実際は 1 枚の画像を 10 台あまりのコンピュータで分割して描画したので実質的な描画時間は 3～5 時間であった。

写真 1～4 はマンデルブロー集合である。横軸はパラメータ C の実部 C_x を、縦軸は虚部 C_y を表わす。初期値 $Z_0 = X_0 + i Y_0$ は写真 1～4 共に $X_0 = -10, Y_0 = -10$ である。写真 1 は複素数 Z_n を $D_{-\pi/2} = \{-3\pi/2 \leq \theta_n \leq \pi/2\}$ に限定し、 $-10 \leq C_x \leq 10, -10 \leq C_y \leq 10$ の範囲で描いてある。中心に向かって収束指数 n_c の値は大きくなり、同時に同じ n_c の値をもつ領域は小さくなっている。これらの領域の示す模様は中心に向かって小さくなりながら同じ構造を繰返すもので、自己相似性を持つフラクタルの特徴がよく現われている。また、中央から上方に向かって伸びている白色の領域は、偏角の範囲のとり方に起因して生ずると考えられる周期点の集合である。この白色の領域をはさんで模様の不連続性が見られるのも偏角の不連続の反映と考えられる。写真 2～4 はいずれも Z_n の偏角を $D_\pi = \{0 \leq \theta_n \leq 2\pi\}$ に限定したもので、パラメータ C の範囲が異なっている。写真 2 は $-10 \leq C_x \leq 10, -10 \leq C_y \leq 10$ の範囲で、写真 3 は $-20 \leq C_x \leq 0, -7 \leq C_y \leq 2$ の範囲で、写真 4 は $-3 \leq C_x \leq 0, -7 \leq C_y \leq 1$ の範囲で描いてある。写真 2 において中央から右側へ伸びている白色の領域は、第 3 図において吸引的な固定点の存在しない領域に対応するもので、数値解析の結果では多周期点の集合となっている。色の付いている領域は写真 1 と本質的に同じ模様を示すフラクタル構造をしている。写真 3 および 4 は写真 2 における多周期的集合の先端（右端）の部分を拡大したものである。特に写真 4 における多周期点集合の先端の境界はなめらかでなく、これが式 (13) で得られる境界をはみ出しているため、この部分は偽の周期解 [5] である可能性もある。詳細は明らかでない。

次に写真5～8は充填ジュリア集合のコンピュータ・グラフィックスである。横軸は初期値 Z_0 の実部 X_0 を縦軸は初期値の虚部 Y_0 を表わす。写真5～6については、共に $-3\pi/2 \leq \theta_n \leq \pi/2$, $C_x = -1.5$, $C_y = 6$ の場合のものである。写真5については、横軸と縦軸を次に示すような対数目盛で描いてある。グラフィックスの正方形の一辺を $2a$ とし中央を原点とするスクリーン座標を、極座標で r , θ とすると、この点の表わす初期値 $Z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ は次の関係式で与えられる。

$$\begin{cases} \log|Z_0| = -3 + 6r_0/a, & 0 \leq r_0 \leq a \\ \arg Z_0 = \theta_0 \end{cases}$$

このような目盛で描くことの利点は原点付近の微細な構造が拡大され、内部と外部を同時に同じクラブで観察できる点にある。写真5のジュリア集合を $-10 < X_0 < 10$, $-10 < Y_0 < 10$ の範囲で等間隔目盛で描いたものが写真6である。両写真とも白色の領域は多周期点を示す。写真7, 8についても写真5, 6と同様であるので次にパラメータの値などを示すにとどめる。

$$\begin{aligned} \text{写真7: } & -\pi/2 \leq \theta_n \leq 3\pi/2, C_x = 0, C_y = 0, \\ & -10 \leq X_0 \leq 10, -10 \leq Y_0 \leq 10 \end{aligned}$$

$$\text{写真8: } -\pi/2 \leq \theta_n \leq 3\pi/2, C_x = -2, C_y = -5.87$$

X_0, Y_0 の目盛は写真5と同様の対数目盛りである。

紙数の関係で我々の得たコンピュータ・グラフィックスの全てを紹介することはできなかった。その1部は「科学朝日」, 1991年, 新年号 [6] に掲載される予定である。この中にはマンデルブロー集合と同様に自己相似性を有するフラクタルの特徴を持つ充填ジュリア集合も存在する。本論文で紹介した充填ジュリア集合でもマンデルブロー集合にない複雑な構造を示し、パラメータ C の値により様相が一変する。詳細は検討中である。

§4. おわりに

複素力学系 $Z_{n+1} = C + \log Z_n$ のコンピュータ・グラフィックスについて現在までに得られたものの一部を報告した。この系の解析的な研究は今後に残された大きな問題であるが、簡単な解析、数値計算およびそれによるグラフィックスの観察などから次のようなことが推測される。

- (1) いかなる C の値に対しても、また、どのような初期値 Z_0 に対しても C の全領域がマンデルブロー集合となり；また、どんな C の値に対しても、初期値 Z_0 のすべての領域が充填ジュリア集合となる。それは、どのように大きな絶対値をもつ Z でも、その対数をとることによって原点に近づくからである。もちろん、原点に近づき過ぎる再び遠方へ跳び飛ばされる。
- (2) したがって、軌道は固定点に近づくもの、周期解に近づくもの、あるいはカオスの挙動を示すもののいずれかであるが、我々の数値計算の結果では非常に大きい周期解は見つ

かっているがカオスの挙動を示すものは一次元的写像の特別の場合 [4] を除いては見つかっていない。

- (3) 前述の如く、全領域がマンデルブロー集合、充填ジュリア集合であるから、この領域を色付けする方法としては我々は収束の速さ、あるいは周期の大きさによって区別した。その具体的な着色方法は収束指数を n_c とするとき描くべき点のカラーコード C を

$$C = n_c \text{ MOD } 6 + 1$$

で与えた。また、周期解については $C = 7$ とした。この結果、マンデルブロー集合は花びらの模様をした自己相似性をもつフラクタル図形が出現した。周期解については桂、福田の指摘する偽の周期解 [5] が含まれているかも知れない。充填ジュリア集合については毛マリの模様をしたものや本論文で紹介できなカステンドグラスの模様、毒ぐもの形をしたもの [6] などきわめて豊富な変化を示す。いずれにしても研究は緒についたばかりなので今後の解析的な研究をまたなければならない。

謝 辞

本研究のコンピュータ・グラフィックスは川崎医科大学数学教室のパーソナルコンピュータ FM16 β (富士通, 35台) でなされた。心よく使用を許可下さいました有田清三郎助教授および数学教室の皆様へ感謝致します。また、コンピュータ・グラフィックスの実行にあたっては川崎医療短期大学、医用電子技術科卒業研究生、鬼無直子、村上幸司の両君に、また、グラフィックスの写真撮影については川崎医科大学、教材教具センター中田隆男テレビ室長に、それぞれ大変お世話になったことを記し、感謝の意を表します。

参 考 文 献

- [1] 斎藤彦彦：「200年続いた孫引きの誤り発見顛末記」, 数字セミナー, 1988年, 2月号, pp.42-45
 [2] 朝日新聞, 1988年3月24日朝刊
 [3] 川部 健：「 n 次対数定積分の数値解析」, 岡山大学計算機センター紀要, 1990年 (掲載予定)
 [4] Takeshi KAWABE and Yoshiro KONDO : Fractal Transformation of the One Dimensional Chaos Produced by $x_{n+1} = \log(a|x_n|)$, (発表予定)
 [5] Shigetoshi KATSURA and Wataru FUKUDA : EXACTLY SOLVABLE MODELS SHOWING CHATIC BEHAVIOR, Physica, 130A (1985), pp.597-605.
 [6] 川部 健, 近藤芳朗：「対数写像が描くフラクタルの妙」, 科学朝日, 1991年, 新年号, pp.132-133.



写真1 マンデルブロー集合1

$$X_0 = -10, Y_0 = -10, -3\pi/2 < \theta < \pi/2$$

$$-10 < Cx < 10, -10 < Cy < 10$$


写真2 マンデルブロー集合2

$$X_0 = -10, Y_0 = -10, 0 < \theta < 2\pi$$

$$-10 < Cx < 10, -10 < Cy < 10$$


写真3 マンデルブロー集合3

$$X_0 = -10, Y_0 = -10, 0 < \theta < 2\pi$$

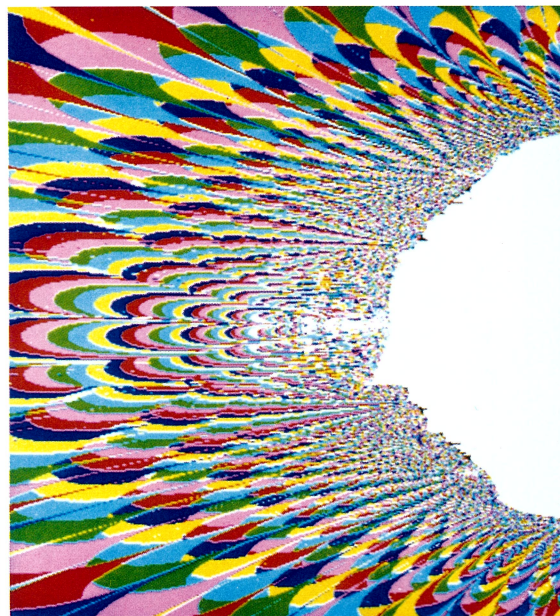
$$-20 < Cx < 0, -7 < Cy < 2$$


写真4 マンデルブロー集合4

$$X_0 = -10, Y_0 = -10, 0 < \theta < 2\pi$$

$$-3 < Cx < 0, -7 < Cy < 1$$

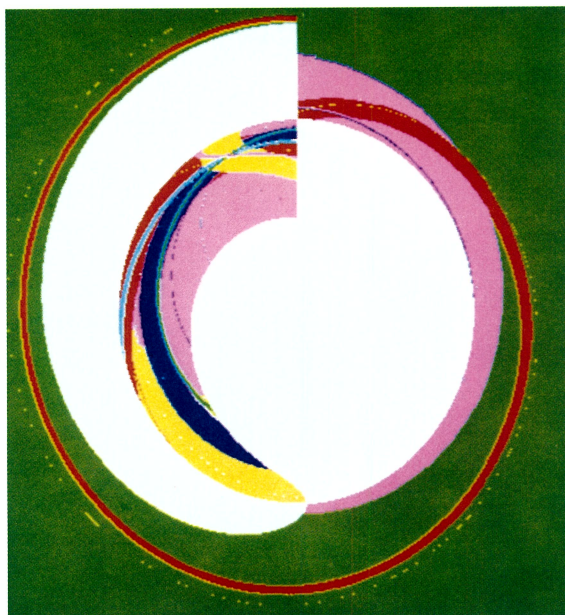


写真 5 充填ジュリア集合(対数表示) 1

$Cx = -1.5, Cy = 6, -3\pi/2 < \theta < \pi/2$
 $10^{-3} < |X_0| < 10^3, 10^{-3} < |Y_0| < 10^3$

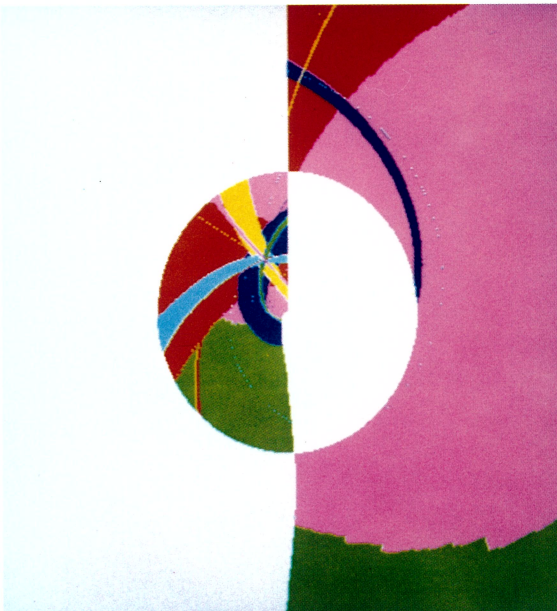


写真 6 充填ジュリア集合 2

$Cx = -1.5, Cy = 6, -3\pi/2 < \theta < \pi/2$
 $-10 < X_0 < 10, -10 < Y_0 < 10$



写真 7 充填ジュリア集合 3

$Cx = 0, Cy = 0, -\pi/2 < \theta < 3\pi/2$
 $-10 < X_0 < 10, -10 < Y_0 < 10$



写真 8 充填ジュリア集合(対数表示) 4

$Cx = -2, Cy = -5.87, -\pi/2 < \theta < 3\pi/2$
 $10^{-2} < |X_0| < 10^6, 10^{-2} < |Y_0| < 10^6$