

## 対数写像とタイプII間欠性カオス

川崎医科大学 情報科学1教室\*, 津山工業高等専門学校 一般教育(物理)\*\*

近藤芳朗\*・川部 健\*\*

(平成10年10月13日受理)

Logarithmic Map and Type-II Intermittency

Yoshiro KONDO\* and Takeshi KAWABE\*\*

*Department of Information Sciences, Kawasaki Medical School,  
Kurashiki, 701-0192, Japan\**

*General Studies (Physics), Tsuyama National College of Technology,  
Tsuyama, 708-8509, Japan\*\**

*(Received on October 13, 1998)*

### 概 要

実関数の対数写像  $x \rightarrow \log(a|x|)$  は  $a=e$  および  $a=1/e$  の近傍でそれぞれタイプIおよびタイプIIIの間欠性カオスを示す。複素対数写像  $z \rightarrow C + \log z$  は  $-\pi/2 \leq \arg(z) < \pi/2$  の条件のもとにタイプII間欠性カオスを示し、平均ラミナー長  $\langle N \rangle$  についてのスケーリング則  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1.000}$  が数値的に得られた。これらの写像は初期値への再投入メカニズムを写像自身が含んでいる。平均ラミナー長は、一般的に言って再投入点領域の形や大きさ、分布の密度に依存する。このため、ラミナー長についてクロスオーバー効果が現れる。

タイプII間欠性カオスを示すモデル写像は  $z \rightarrow \lambda z + \sum C_k z^k$  で与えられる。ここに、 $\lambda = (1 + \epsilon) \exp(2\pi i \Omega)$  であり、ラミナー状態は  $|z_0| < |z| < R_l$  で生じるものとし、再投入点  $z_0$  は  $R_1 \leq |z_0| \leq R_2 < R_l$  の範囲に分布するものとする。このとき、平均ラミナー長については、 $\Omega$  が無理数の場合、 $N \propto \epsilon^0$ ,  $\log(1/\epsilon)$ ,  $\epsilon^{-(n-3)/(n-1)}$  ( $n=2, 3, 4, \dots$ ),  $\epsilon^{-1}$  など種々の  $\epsilon$  依存性を示す。反対に  $\Omega$  が有理数  $q/p$  に等しい場合には、モデル写像は適当な変換によって  $z' \rightarrow \lambda z' + b z'^{p+1} + O(z'^{2p+1})$  と変換される。複素対数写像による我々の数値シミュレーションでは  $p$  は31である。この結果、解析的に  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1}$  が得られる。

### Abstract

The real logarithmic map  $x \rightarrow \log(a|x|)$  exhibits type-I and type-III intermittennt chaos near  $a=e$  and  $a=1/e$ , respectively. The complex logarithmic map  $z \rightarrow C + \log z$  which is defined for  $-\pi/2 \leq \arg(z) < \pi/2$  generates type-II intermittent chaos, and the scaling law for the mean laminar length  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1.000}$  is numerically obtained. These maps include reinjection mechanism in itself. The mean laminar length  $\langle N \rangle$  generally depends on size, shape, and density of distribution of reinjection points and hence crossover behavior of the scaling law of  $\langle N \rangle$  is caused.

The model map which describes type-II intermittency is provided by  $z \rightarrow \lambda z + \sum C_k z^k$ ,

$\lambda=(1+\epsilon)\exp(2\pi i\Omega)$  under the assumptions that the laminar state occurs in the range  $|z_0| < |z| < R_1$  and that the reinjection point  $z_0$  is distributed in the range  $R_1 \leq |z_0| \leq R_2 < R_1$  for each laminar state. Then, the mean laminar length exhibits various  $\epsilon$  dependence such as  $N \propto \epsilon^0$ ,  $\log(1/\epsilon)$ ,  $e^{(n-3)/(n-1)}$  ( $n=2, 3, 4, \dots$ ),  $\epsilon^{-1}$  for an irrational constant  $\Omega$ . On the otherhand, for a rational constant  $\Omega=q/p$ , the mapping can be reduced to  $z' \rightarrow \lambda z' + bz'^{p+1} + O(z'^{2p+1})$ . In the case of our numerical simulation for logarithmic map  $p$  is given by 31, and this leads  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1}$ .

## 1. 研究の発端

実関数および複素関数の対数写像はカオスを示す。このカオスは間欠性カオスであり、初期値への投入メカニズムを写像自身が含まれている。原点から遠く離れた点是对数をとることにより、より原点に近い点に写像され、反対に原点にきわめて近い点は原点から離れた点に写像される。これが、対数写像が間欠性カオスを示す理由でもあり、また、初期値への投入メカニズムを写像自身が含まれている理由でもある。間欠性カオスの平均ラミナー長 $\langle N \rangle$ は一般に初期値分布の大きさ・形・密度に依存し、それ故 $\langle N \rangle$ についてのスケーリング則にクロスオーバー効果が見れる。

我々の研究の発端は、200年間誤ったまま掲載されていた定積分の公式

$$\int_0^1 \frac{dx}{\log|\log x|} = 0 \quad (\text{誤り}) \quad (1)$$

である。著者達はこのことを朝日新聞の記事<sup>1)</sup>と数学セミナーの論文<sup>2)</sup>で知った。この間違った公式の源はマスケローニの本『オイラーの積分学への注釈』(1790年)であるとのことである。(第1図)そしてこれがデ・ハーン(1858年)に引用され、さらにグラッドシュタインとリジック(1965年)に孫引きされ今日まで200年間違って伝えられたものである。正しくは

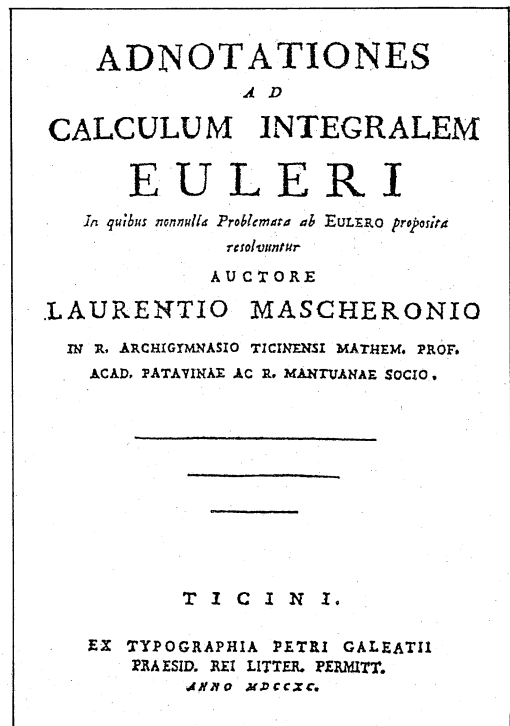
$$\int_0^1 \frac{dx}{\log|\log x|} = -0.154479641320043$$

(正しい) (2)

である。<sup>3)</sup>

著者たちはこの対数の積分に興味を示し、この積分を被積分関数の対数を多重に連ねたものに一般化するため実関数の対数写像

$$x_{n+1} = \log(a|x_n|) \quad (3)$$



第1図(文献2)より)

$$a > 0, x_0 = x$$

を導入し、積分

$$Ln^{(n)} = \int_0^1 x_n dx, \quad a=1 \tag{4a}$$

$$Ln^{(-n)} = \int_0^1 \frac{1}{x_n} dx, \quad a=1 \tag{4b}$$

の値を求めた。この二つの積分の値は  $n$  の関数としてフラクタルな変化を示し、self-affinity な変動をする。<sup>4,5)</sup> (第2図)

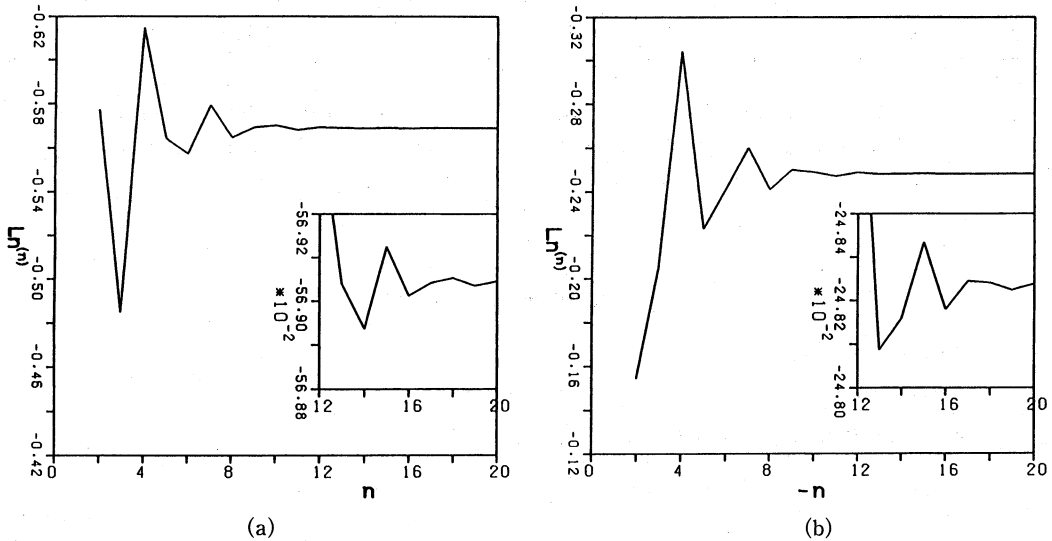


Fig. 2. The variations of the definite integral values  $L_n^{(n)}$  versus (a) positive  $n$  and (b) negative  $n$ . For both the cases fractal changes can be found for large  $|n|$  as shown in small window regions. (from Ref. 4)

## 2. 実関数の対数写像

実関数の対数写像(3)は  $e^{-1} < a < e$  の場合にのみカオスを示す。(第3図)この写像は  $a=e$  の近傍ではタイプIの間欠性カオスを示し、 $a=e^{-1}$  の近傍ではタイプIIIの間欠性カオスを示す。

(第4図) いずれの近傍の間欠性カオスも、ラミナー長の平均値  $\langle N \rangle$  について近似的に  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-0.5}$  が成り立つことを数値的に確認した。シミュレーションの結果は

$$\langle N \rangle \propto \begin{cases} \epsilon^{-0.499} & \text{for } \epsilon = e - a \\ \text{(タイプI間欠性カオス)} \\ \epsilon^{-0.508} & \text{for } \epsilon = a - e^{-1} \\ \text{(タイプIII間欠性カオス)} \end{cases} \tag{5}$$

である。

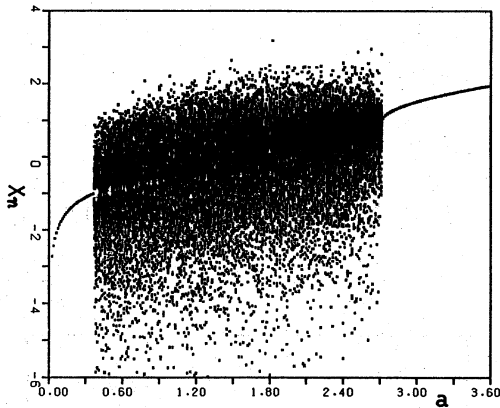


Fig. 3. Bifurcation diagram of a logarithmic map. For every a 150 points are plotted. Chaos appears for the region  $e^{-1} < a < e$ . (from Ref. 4))

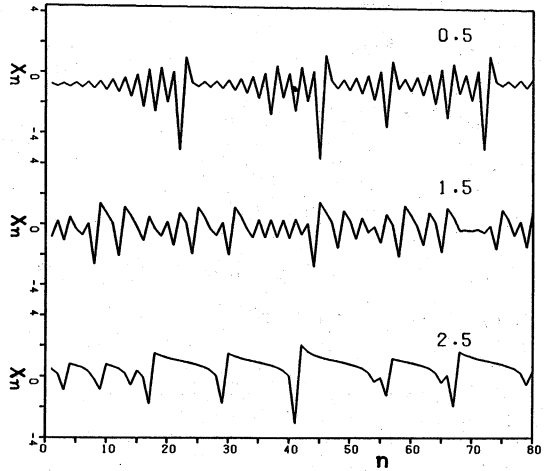


Fig. 4.  $n$ -sequence for the cases  $a=0.5, 1.5$  and  $2.5$  in a chaos region. (from Ref. 4))

### 3. 複素関数の対数写像

複素関数の対数写像

$$z_{n+1} = C + \log z_n \tag{6}$$

は複素数  $z_n$  の偏角の設定に任意性がある。多価関数  $\log z_n$  を 1 価にするため、偏角の設定を  $0 < \arg(z_n) < 2\pi$  とした場合には複素対数写像(6)はどんな複素定数  $C$  に対しても周期解だけを示し、カオスは見られなかった。しかし、複素  $C$  平面上での周期解領域については period adding sequence が存在していた。偏角を  $-\pi/2 < \arg(z_n) < \pi/2$  に限定すると複素対数写像(6)は周期解の他にカオス解が存在する。<sup>6-11)</sup>(第 5 図) この場合のカオスはタイプ II の間欠性カオスであってラミナーの平均長について、 $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1.000}$  であることが数値的に得られた。<sup>12)</sup>(第 6 図) この場合の初期値は 1 次元分布をしており(第 7 図)、我々の結果はこの分布に対応するポモウ、シュスターらの標準理論の結果  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1/2}$  とは異なる。この数値的結果は  $C_x = -0.65, C_y =$

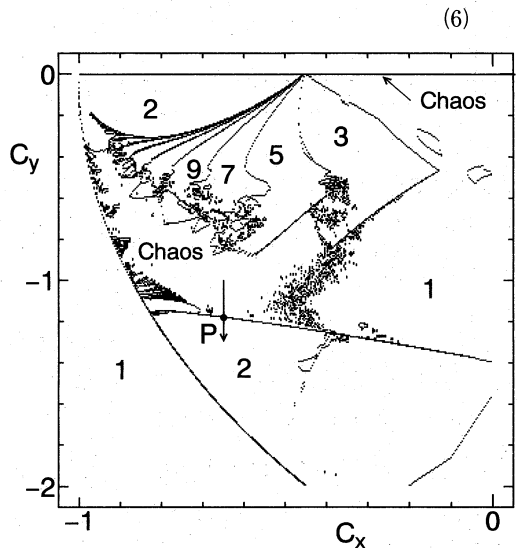


Fig. 5. Bifurcation diagrams of a complex logarithmic map  $Z \rightarrow \ln Z + C$  for the case  $-\pi/2 \leq \arg(Z) < \pi/2$ . Figures denote period within the region. Type-II intermittency occurs near the boundary between chaos and the period-2 region. (from Ref. 13))

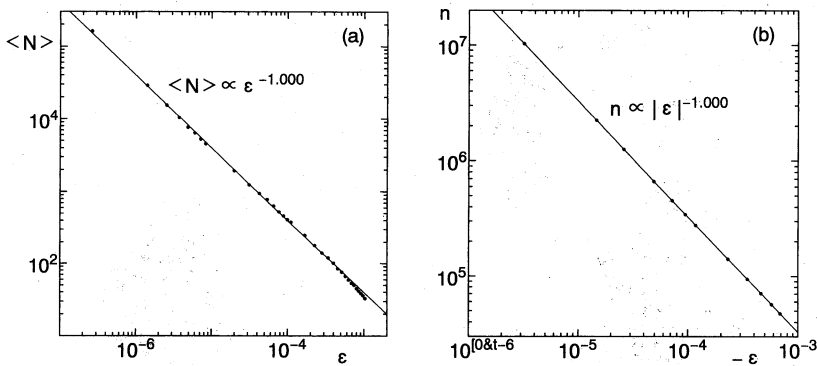


Fig. 6. (a) The mean laminar length  $\langle N \rangle$  and (b) the iteration length  $n$  versus  $\epsilon$ .  $n$  expresses the iterated number which takes to reach the stable periodic point from the position apart by a finite distance. The slope of solid lines in the log-log plot has been determined by the least squares method fittings (from Ref. 13))

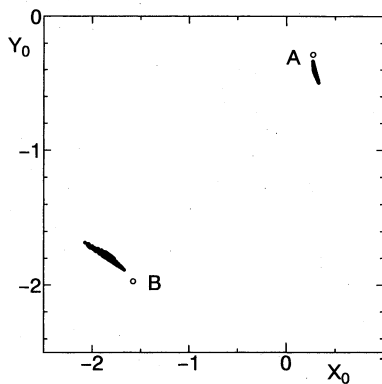


Fig. 7. The distribution of 230 reinjection points for  $\epsilon=0.001$ . The iterated points are inevitably first reinjected in the region of **B** and then reinjected in that of **A** in the following step. It should be noted that the reinjection points are not uniformly distributed but rather are one-dimensionally distributed. (from Ref. 13))

-1.179397... の場合のものであって、この近傍のカオス状態では、式(6)による写像点は不安定 2 周期点の回りを交互に31周期的に回転する挙動を示しタイプII間欠性カオスを示す。<sup>12,13)</sup>(第 8 図)

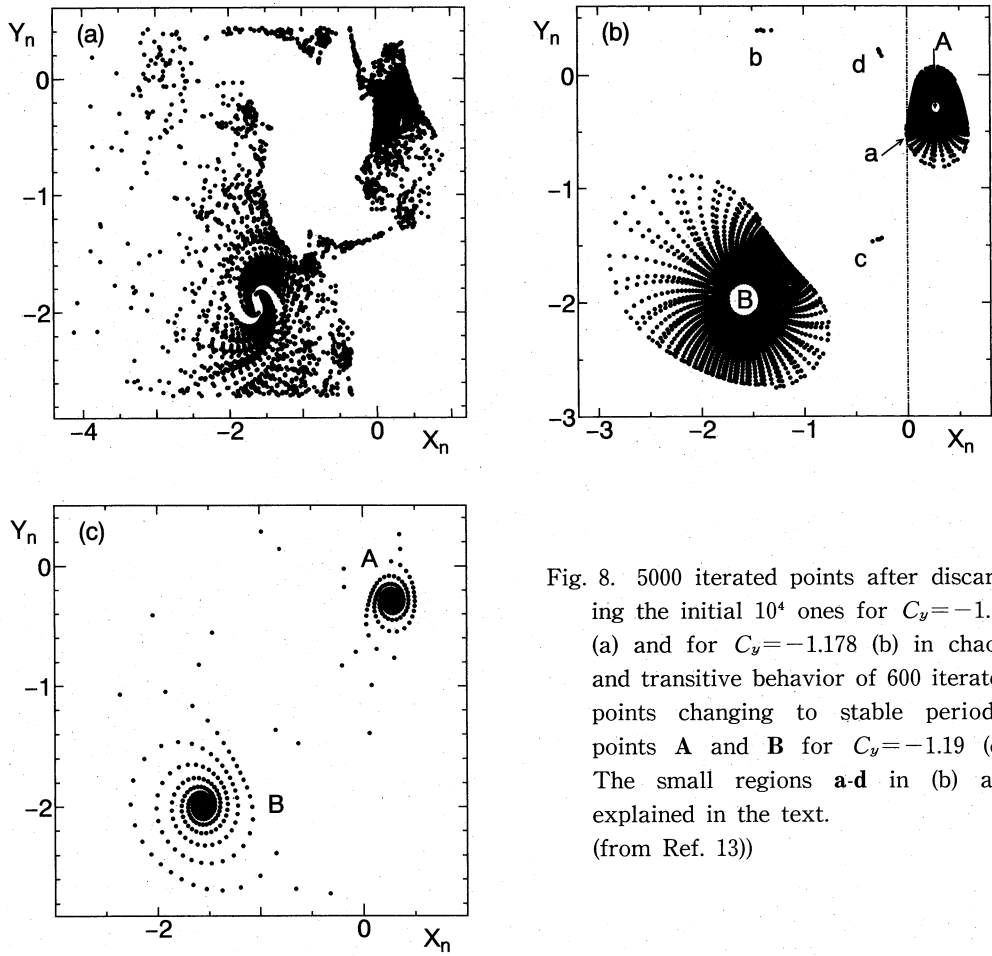


Fig. 8. 5000 iterated points after discarding the initial  $10^4$  ones for  $C_y = -1.14$  (a) and for  $C_y = -1.178$  (b) in chaos, and transitive behavior of 600 iterated points changing to stable period-2 points A and B for  $C_y = -1.19$  (c). The small regions a-d in (b) are explained in the text. (from Ref. 13))

#### 4. 複素モデル写像

前述で述べたタイプII間欠性カオスは次のモデル写像によって近似される。

$$z_{n+1} = \lambda z_n + h(z_n) \quad (7a)$$

$$\lambda = (1 + \epsilon) \exp(2\pi i \Omega) \quad (7b)$$

極座標では

$$r_{n+1} = (1 + \epsilon) r_n + r_n^2 \quad (8a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi \Omega \quad (8b)$$

ここに

$$r_n = |z_n|, \quad \theta_n = \arg(z_n) \quad (8c)$$

である。いま、ラミナーは

$$r_0 \leq r_n \leq R_t \quad (9)$$

の範囲で起こり、初期値  $z_0$  は

$$R_1 \leq |z_0| \leq R_2 \leq R_l \tag{10}$$

の範囲に分布するものと仮定する。初期値  $r_0$  に対するラミナーの長さ  $N$  は

$$N = \frac{\epsilon^{-1}}{z-1} \ln \left( \frac{1 + \epsilon r_0^{1-z}}{1 + \epsilon R_l^{1-z}} \right) \tag{11}$$

で与えられ、動径  $r_0$  だけに依存する初期値分布の密度関数

$$\hat{p}(r_0) = c r_0^\alpha \tag{12}$$

に対するラミナーの平均長  $\langle N \rangle$  は

$$\langle N \rangle = \int_{R_1}^{R_2} \hat{p}(r_0) r_0 N dr_0 \tag{13}$$

で与えられる。

### 5. スケーリング則についてのクロスオーバー効果

種々の特性長

$$R_\epsilon = e^{1/(z-1)} \tag{14}$$

に対する  $\langle N \rangle$  の解析的結果は以下に要約される。<sup>14,16)</sup>

(I)  $\Omega$  が無理数の場合

- ①  $R_l \ll R_\epsilon$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1}$
- ②  $R_2 \ll R_\epsilon \ll R_l$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1}$
- ③  $R_1 \ll R_\epsilon \ll R_2$ ,  $\xi = (z - \alpha - 3)/(z - 1)$ 
  - (i)  $\xi < 0$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^0$
  - (ii)  $\xi = 0$  :  $\langle N \rangle \propto -\ln \epsilon$
  - (iii)  $0 < \xi < 1$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-\xi}$
  - (iv)  $\xi = 1$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1+0}$
  - (v)  $\xi > 1$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1+0}$
- ④  $R_\epsilon \ll R_1$  :  $\langle N \rangle \propto \epsilon^0$

(II)  $\Omega$  が有理数  $q/p$  に等しい場合

この場合、非線形写像論の Normal Form の方法によって、適当な変換

$$z_n = \xi_n + h_\epsilon(\xi_n) \tag{15}$$

により

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + \xi_n^{p+1} G(\xi_n^p), \quad G(0) \neq 0 \tag{16}$$

することができる。この写像を  $p$  回繰り返すと

$$\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n + \xi_n^{p+1} u_\epsilon(\xi_n^p), \quad u_\epsilon(0) \neq 0$$

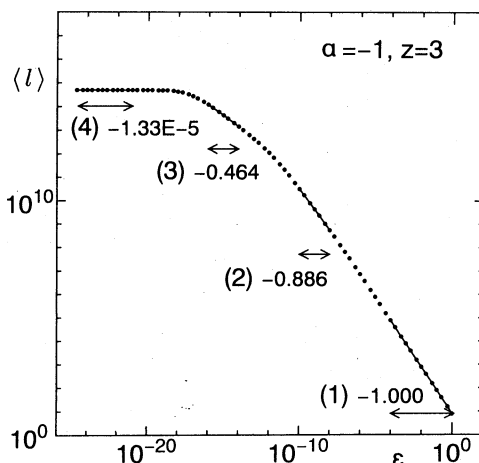


Fig. 9. Crossover behavior in the scaling law of the mean laminar length. Regions (1)–(4) indicated by arrows satisfy the respective inequalities and figures denote the power exponent obtained by the least squares method fits. (from Ref. 14)

(17)

となる。 $z_n$ の初期値分布は変換(15)によって $\xi_n$ の初期値分布に変換される。番号 $n$ を $p$ を単位として数えるものとするれば、(17)の主要項は

$$r_{n+1} = (1 + p\epsilon)r_n + v r_n^{2p+1} \quad (18)$$

$$r_n = |\xi_n|, \quad 2v = |u_0(0)| \quad (19)$$

となる。こうして(I)の場合に帰着される。

著者たちのシミュレーションで行った複素対数写像の場合、( $C = -0.65 - 1.179397i$ )点列 $z_n$ での初期値 $z_0$ は $10^{-5} < \epsilon < 10^{-3}$ に対して $0.04 < |z_0| < 0.3$ であり、また、 $p = 30.9968$ でもあるので、初期値近傍での写像(17)およびこれに対応する $z_n$ についての写像は有効数字4~5桁の精度で数値的に $\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n$ あるいは $z_{n+p} = \lambda^p z_n$ となる。これは、上に述べた初期値範囲に対して、変換(15)は実質的に線形写像であることを意味する。すなわち、 $z_n$ についての初期値分布は形、大きさを変えないで $\xi_n$ の初期値分布に変換される。以上のことから写像(18)に対して、

$$R_1 < R_2 < R_l \sim 0.5, \quad z = 63$$

であり、 $\epsilon > 10^{-10}$ に対して

$$\epsilon R_l^{1-z} \gg 1$$

であるので、(13)から

$$\langle N \rangle \propto \epsilon^{-1}$$

が得られる。これはシミュレーションの結果と一致する。

## References

- 1) 朝日新聞, 1988年3月24日朝刊
- 2) 斉藤基彦: 「200年続いた孫引きの誤り発見顛末記」, 数学セミナー, 1988年, 2月号, 42-45
- 3) 川部 健: 「 $n$ 次対数定積分の数値解析」, 岡山大学計算機センター紀要, 3: 19-34, 1990年
- 4) T. Kawabe and Y. Kondo: Fractal Tranceformation of the One-Dimensional Chaos Produced by Logarithmic Map, Prog. Theor. Phys. 85: 759-769, 1991
- 5) T. Kawabe and Y. Kondo and Y. Aoyama: Intermittnt Chaos Generated by Logarithmic Map, Prog. Theor. Phys. 86: 581-585, 1991
- 6) T. Kawabe, Y. Kondo and Y. Aoyama: Critical Behavior of a Complex Logarithmic Map, Rep. Res. Lab. Surf. Sci. Okayama Univ. 7: 35-40, 1991
- 7) T. Kawabe and Y. Kondo: Bifurcations of the Complex Dynamical System  $z_{n+1} = \ln(z_n) + C$ , J. Phys. Soc. Jpn. 62: 497-505, 1963
- 8) M. Tanaka and T. Kawabe: Critical Behavior of Complex Logarithmic Map, J. Phys. Soc. Jpn. 62: 3767-3770, 1993
- 9) T. Kawabe and M. Tanaka: Bifurcation and Scaling Law of Complex Dynamical System  $z_{n+1} = \ln(z_n) + C$ , *Geometry and Analysis in Dynamical Systems*, Advanced Series in Dynamical Systems 14, 50-60 (1994), World Scientific.
- 10) M. Tanaka and T. Kawabe: Scaling properties of a complex dynamical system, Phys. Lett. A 199: 180-184, 1994
- 11) M. Tanaka, T. Kawabe and T. Kondo: On a Hopf Radius for Complex Maps, Rep. Res.



- Lab. Surf. Sci. Okayama Univ. 7: 173-178, 1995
- 12) T. Kawabe and Y. Kondo : Scaling Law of the Mean Laminar Length in Intermittent Chaos, J. Phys. Soc. Jpn. 65: 879-882, 1996
  - 13) T. Kawabe, Y. Kondo and M. Tanaka : Scaling Properties of Type-II Intermittency, Prog. Theor. Phys. 96: 1-11, 1996
  - 14) Y. Kondo and T. Kawabe : Crossover behavior in the scaling law of type-II intermittency, Phys. Lett. A 255: 225, 73-78, 1997
  - 15) Y. Kondo and T. Kawabe : On Type-II Intermittency around Resonance, J. Phys. Soc. Jpn. 65: 4084-4085, 1996
  - 16) T. Kawabe and Y. Kondo : Normal Form of Intermittency with Resonance, Rep. Res. Lab. Surf. Sci. Okayama Univ. 7: 231-236, 1996