初潮年齢分布の最尤推定

—検査当日における満年齢と初潮経験の有無をデータとして—

川崎医科大学（統計学教室）
仮　谷　太　一

Menarche Age Distribution Estimated by the Method of Maximum Likelihood on Incomplete Quantal Data

Taichi Kariya
Division of Statistics, Kawasaki Medical University

女子中学生を対象に，年度初めに，各人の生年月日と調査時点までに初潮を経験しているか否かだけを調査し，グループピングなどを行わないで，その集団の初潮年齢分布を直接推定する方法について述べる．

なお，初潮年齢分布の型としては，特に制限はないが，ここでは従来の諸研究[1)2)3)4)5)]をもとに，対数正規分布または正規分布に従うとの仮定をとり，この2つの場合について母数の最尤推定を行った．この方法によりわれわれは，データ収集の困難性およびデータの誤差の問題から開放され，地域性と年齢層のみに依存する集団の初潮年齢分布の最尤推定を，きわめて容易に実行することができる．

調査は6中学校について実施し，それぞれの初潮年齢分布を推定した．また推定値の簡単な統計解析を行っている．

To obtain reliable records of the age of menarche in adolescent girls is difficult, organizationally and possibly psychologically. On the other hand, a sample of girls distributed over the appropriate age range can relatively easily be classified according to whether or not each has yet menstruated.

In this paper we attempt to estimate the menarche age distribution parameters by using directly these incomplete quantal data. Practically the data of each sample girl consist of her age on the day of survey and the record as to whether or not she has yet menstruated.

The principle of estimation is maximum likelihood and we assume that the menarche age distribution is normal or lognormal.

By this maximum likelihood estimation method, we shall be released from laborious work gathering data and errors of records and can easily estimate the distribution parameters depending on the region and age group only.

The survey was undertaken at six junior high schools and the menarche age

distributions were estimated respectively. Besides some statistical analysis for the estimates were carried out.

§0 はじめに

初潮年齢は，個人または集団の成長あるいは成熟の指標として重要な意義をもち，遺伝因子および環境条件によって影響をうけることが知られている．さらに初潮年齢の分布は，性教育カリキュラムの編成にも欠くことのできない情報である．ところで従来，考察の対象とする集団の初潮年齢分布については，その集団の全員が初潮を経験し終った時点で，各人の初潮開始年齢を日記または記憶にもとづいて調査することが必要であったが[1)2)]，このことはデータの精度の点からも，データ収集組織の観点からも多くの問題点を含んでいる．さらに調査対象が私立女子学園とか看護学院とかに限られがちであったが，このことは，地域性・年代性のほかに他の社会的要因の影響をまぬがれないであろう．なお既潮者が100％に達しない場合，初潮年齢分布の予測をする方法についての報告例[3)]もあるが，かなり経験的な手続きを多く含んでおり，近似的な方法である．また標本数がかなり大でないと，満年齢別に既潮率を算定する段階で面倒な問題に遭遇することも必至である．

ここに述べる方法は，普通の規模以上の学校であれば単独で，現在の中1，2，3年生，小4，5，6年生だけについての簡単な調査にもとづいて，初潮年齢分布の最尤推定をすることができる．実際例として，O県K市における6つの中学校での調査結果にもとづき，それら各校の初潮年齢分布を示す．

なお，ここに示す最尤推定は，従来の諸調査によって分布型が既知であるような quantal (all or nothing) data には，すべて適用可能である．ある病気の発現と特定の臓器における毒物蓄積量の分布，および乳歯の萌出年齢分布の推定などは格好の適用分野である．

§1 調査要項とデータ変換

調査の要領とデータ変換について箇条書きにして述べよう．

1) 調査は，男女別の授業時間などを利用して，クラスごとに行うものとする．

調査事項： 調査年月日と各人については，生年月日および調査当日までに初潮経験のあった生徒には○印，まだの生徒には×印をつけさせる．

2) 調査の時期： 中学校では学年当初4月中・下旬がよい．これは行事としても適当と考えられるし，また統計的には中学1年の初めで既潮率がほぼ50％に達するからである．

小学校の場合は，4，5，6年生について年度末（3月）に行うのがよい．

3) 調査の結果は，出席簿の名票などを利用して，クラスごとに次の例のような一覧表にまとめる．

1年3組		調査年月日(昭和49年4月18日*)		
生徒番号	氏　名	生年月日	既 ○ 未 ×	備　考
31	青山みち子	37. 2.18	×	
32	宇野　真理	36. 6. 3	○	
⋮				
51	渡辺　史子	37. 3.15	×	

注意： 調査事項を審査したのち，パンチに出すときなどには，プライバシィー尊重の意味からも，点線から切り離すのがよい．

*) クラスの中で何かの理由で，調査月日の違った生徒は，備考欄に調査年月日を別記する．

4) データ変換(インターバル・データ作成).

上の一覧表にもとづいて調査当日における満年齢 (t) —このたびの調査では日数—を算定し

○印の場合には (a, t)

×印の場合には (t, b)

とし，この整数の組を各人のデータ（インターバル・データ）とする．aは十分小さな数，bは十分大きな数であれば適当でよく推定結果には，ほとんど影響はない．このたびの計算では a=2,000日，b=9,000日とした．

§2 最尤法による初潮年齢分布の推定

次に最尤法による初潮年齢分布の母数の推定法について簡単に述べよう．

従来の報告によると初潮年齢の分布は，正規分布または logistic 分布とするのが普通のようであるが，本論文では諸文献の分布を検討した結果，正の歪みをもっているので，対数正規分布が適当であるとの判断に達した．しかしコンピュータのプログラムとしては，対数正規分布を仮定した場合も，正規分布を仮定した場合も大差はないので，2つの仮定の下でそれぞれ母数の推定を行った．

さて分布函数の数学的な形は既知であると仮定するのであるから，その分布函数を $F(x;\boldsymbol{\theta})$ とする．ここに $\boldsymbol{\theta}$ は推定すべき未知母数である．i 番目の生徒の初潮開始年齢を x_i^* とすると，x_i^* の値は不明であるが，上記のインターバル・データ（これを一般に (y_i, z_i) と表わすことにする）の作り方から

$$y_i < x_i^* < z_i$$

が成立している．

分布函数 $F(x;\boldsymbol{\theta})$ をもつ母集団からのランダム・サンプルを $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ とする．ここに $F(x;\boldsymbol{\theta})$ の数学的な形は既知とし，$\boldsymbol{\theta}$ は未知母数である．$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ は普通の意味でのデータとは云えないが

$$y_i < x_i^* < z_i, (i=1,2,\ldots,n) \quad (1)$$

をみたす数の組 (y_i, z_i), $i=1,2,\ldots,n$ がインターバル・データとして与えられている．このとき，標本 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ の尤度 L は，次式によって定義される．

$$L \propto \prod_{i=1}^{n}(F(z_i)-F(y_i)) \quad (2)$$

従って対数尤度 $\log L$ は

$$\log L = \log C + \sum_{i=1}^{n} \log(F(z_i)-F(y_i)) \quad (3)$$

となる．ここに C は定数である．

母分布として，正規分布を仮定するときは

$$F(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt$$

である．（対数正規分布を仮定するときは，インターバル・データ (y_i, z_i) を対数変換し $(\log y_i, \log z_i)$ としておいて，正規分布の場合と同様にすればよい．）

このとき（3）は

$$\log L = \log C + \sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{z_i}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{y_i}\exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dt\right\} \quad (3)'$$

となる．従って母数 μ, σ^2 を推定するための最尤方程式は

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\{(-\varphi(z_i')+\varphi(y_i'))/(\Phi(z_i')-\Phi(y_i'))\}=0 & (4)\\ \sum_{i=1}^{n}\{(-z_i'\varphi(z_i')+y_i'\varphi(y_i'))/(\Phi(z_i')-\Phi(y_i'))\}=0 & (5)\end{cases}$$

ここに $z_i'=(z_i-\mu)/\sigma$, $y_i'=(y_i-\mu)/\sigma$；

$$\varphi(z_i')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z_i'^2}{2}\right),$$

$$\varphi(y_i')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y_i'^2}{2}\right);$$

$$\Phi(z_i')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_i'}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt,$$

$$\Phi(y_i')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y_i'}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

となる．

この連立方程式をみたす $\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2$ が同時最尤推定値であるが，これらに関して方程式は非線型であるから簡単には解けない．そこで relaxation method を用いることとし，適当な μ, σ^2 の初期値から出発して計算し，調整値（補正値）が適当な値より小さくなるまで反復計算を繰返すのである．次に示す推定手順は Gauss-Seidel 法を修正したものになっている．

〔推定手順〕

1° 初期値 μ_0, σ_0^2 をセットする．

2° $\mu=\mu_0+\Delta\mu$, $\sigma^2=\sigma_0^2$；

$$z_i'=(z_i-\mu_0)/\sigma_0, \quad y_i'=(y_i-\mu_0)/\sigma_0$$

とおいて（4）をテーラー展開し $\Delta\mu$ の2

次以上の項を無視すると

$$\triangle\mu \doteqdot +\sigma_0 \sum_{i=1}^{n} A_{i0}/\sum_{i=1}^{n}(A_{i0}{}^2-B_{i0}).$$

ここに

$$A_{i0}=(-\varphi(z_i')+\varphi(y_i'))/(\Phi(z_i')-\Phi(y_i')),$$

$$B_{i0}=(-z_i'\varphi(z_i')+y_i'\varphi(y_i'))/(\Phi(z_i')-\Phi(y_i'))$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

$\mu_1=\mu_0+\triangle\mu$ とおく.

3° 次に $\mu=\mu_1$, $\sigma^2=\sigma_0{}^2+\triangle\sigma^2$;

$z_i''=\dfrac{z_i-\mu_1}{\sigma_0}$, $y_i''=\dfrac{y_i-\mu_1}{\sigma_0}$ とおいて (5) をテーラー展開し $\triangle\sigma^2$ の2次以上の項を無視すると

$$\triangle\sigma^2 \doteqdot +\sigma_0{}^2 \sum_{i=1}^{n} B_{i1}/\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(B_{i1}^2-B_{i1}-C_{i1})$$

ここに $B_{i1}=(-z_i''\varphi(z_i'')+y_i''\varphi(y_i''))/(\Phi(z_i'')-\Phi(y_i''))$

$C_{i1}=(-z_i''^2\varphi(z_i'')+y_i''^2\varphi(y_i''))/(\Phi(z_i'')-\Phi(y_i''))$.

$\sigma_1{}^2=\sigma_0{}^2+\triangle\sigma^2$ とおく.

4° $\mu_1\to\mu_0$, $\sigma_1{}^2\to\sigma_0{}^2$ として 1° にかえり反復計算を行なう.

5° 収束の判定基準としては, 例えば

$|(\mu_0-\mu_1)/\mu_1|\leqq 10^{-5}$, $|(\sigma_0{}^2-\sigma_1{}^2)/\sigma_1{}^2|\leqq 10^{-5}$

などを用いる.

§3 初潮年齢分布推定の実際

ミニコンを使用しての推定手順の実際と推定結果を示す.

1) §1, 3) の一覧表にもとづいて, 各人ごとにインターバル・データ (y_i, z_i) を算定する. (満年齢日数算定のプログラムは省略)

y_1	z_1
y_2	z_2
⋮	⋮
y_n	z_n
−900	−5

2) n人のインターバル・データを続けてパンチし, 最後にコントロール・データとして, 負の整数を2つパンチする.

3) 初期値 μ_0, $\sigma_0{}^2$ を適当に定めてから, 付録に掲げた母数最尤推定プログラムにより $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ を求める. (第1表)

第1表 μ, σ^2 の最尤推定値

中学校	人数 n	対数正規分布を仮定した場合 $\log x^* \approx N(\mu, \sigma^2)$		正規分布を仮定した場合 $x^* \approx N(\mu, \sigma^2)$	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}^2$
M	349人	8.4183	0.088413^2	4525.0日	430.03^2 日²
T	417	8.4269	0.081139^2	4565.5	397.94^2
K	530	8.4340	0.081171^2	4600.0	396.75^2
F	495	8.4276	0.069902^2	4572.3	336.02^2
N	584	8.4272	0.087500^2	4567.6	426.13^2
H	559	8.3944	0.113701^2	4406.0	558.69^2
全	2,934	8.4228	0.086717^2	4546.4	423.19^2

4) なお, 対数正規分布を仮定した場合と正規分布を仮定した場合とでは, そのままでは結果の比較がむずかしいので, 7つの%点を表にして示した. (第2表)

母分布として, 対数正規分布を仮定した場合は, 正規分布を仮定した場合にくらべて, 50%までの立ち上がりが急で後に長く尾を引いている(正に歪んでいる). これは分布の性質上当然のことであるが, 初潮年齢分布の実際からみて対数正規分布を仮定する方が実際に近いように思われる.

§4 50%点の95%信頼区間と分散分析

最尤推定量は2母数の場合にも好ましい性質をもち, この場合同時有効推定量 $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}^2$ を少し変更した不偏推定量 $\hat{\hat{\mu}}=\hat{\mu}$, $\hat{\hat{\sigma}}^2=\dfrac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$, ($n\gg 1$ であるから $\hat{\hat{\sigma}}^2 \doteqdot \hat{\sigma}^2$) は, 同時有効推定量には効率においてわずかに及ばないが, 同時漸近有効推定量である.

まず6中学校について50%点の95%信頼区間を求めると第3表のようになる.

次に 6中学校の $\hat{\mu}$ の間に有意な差があるかどうかを検定しよう. このとき x_i^* の値が不詳

第2表　初潮年齢分布の％点一覧

母分布	中学校	満年齢 1％が経験済となる	5％が経験済となる	25％が経験済となる	50％が経験済となる	75％が経験済となる	95％が経験済となる	99％が経験済となる
		年　カ月	年　カ月	年　カ月	年　カ月	年　カ月	年　カ月	年　カ月
対数正規分布を仮定した場合	M	10　1.2	10　8.8	11　8.3	12　4.9	13　2.0	14　4.2	15　2.9
	T	10　4.3	10　11.5	11　10.2	12　6.2	13　2.6	14　3.6	15　1.3
	K	10　5.2	11　0.3	11　11.2	12　7.3	13　3.7	14　4.8	15　2.6
	F	10　7.7	11　1.9	11　11.4	12　6.3	13　1.5	14　0.5	14　8.8
	N	10　2.5	10　10.1	11　9.6	12　6.2	13　3.3	14　5.5	15　4.1
	H	9　3.6	10　0.5	11　2.6	12　1.3	13　0.9	14　7.3	15　9.4
正規分布を仮定した場合	M	9　7.9	10　5.5	11　7.2	12　4.7	13　2.3	14　4.0	15　1.6
	T	9　11.7	10　8.6	11　9.3	12　6.1	13　2.9	14　3.6	15　0.5
	K	10　0.8	10　9.8	11　10.5	12　7.2	13　4.0	14　4.7	15　1.5
	F	10　4.6	11　0.1	11　10.9	12　6.3	13　1.7	14　0.4	14　8.0
	N	9　9.6	10　7.1	11　8.7	12　6.2	13　3.6	14　5.2	15　2.7
	H	8　6.1	9　6.6	11　0.4	12　0.8	13　1.2	14　7.1	15　7.6

第3表　50％点の95％信頼区間（単位日）

中学校	対数正規分布を仮定した場合	正規分布を仮定した場合
M	(4487,　4571)	(4480,　4570)
T	(4533,　4604)	(4527,　4604)
K	(4569,　4633)	(4566,　4634)
F	(4543,　4600)	(4543,　4602)
N	(4537,　4602)	(4533,　4602)
H	(4381,　4464)	(4360,　4452)

であるから，通常の意味での分散分析法は適用できないが，中学校ごとに μ, σ^2 の同時最尤推定値が算定されているので，第4表に示した分散分析表が得られる．ところで，母分散均一に関する条件が後に示すように満足されていないので，この分散分析表は近似的なものではあるが，平均値間の差の有意性は母分散の不均一性によって弱められこそすれ強められることはない．従って有意な差があるとの結論には変わりはない．

6つの中学校の $\hat{\mu}$（ここでは50％点）の間には，対数正規分布を仮定したときも正規分布を仮定したときも0.1％の危険率で有意な差があることが認められる．そこでさらにK中学校とH中学校をとり出し，他の4つの中学校との間で有意差検定を行った．その結果は，詳細な比較の欄に示したとおりである．K中学校は他の4つの中学校より既潮率50％に達するのが少し遅いようであるが，有意な差とは言えな

第4表　分散分析表

変動源	対数正規分布を仮定した場合(log $x^* \approx N(\mu, \sigma^2)$) 平方和	自由度	平均平方	F	正規分布を仮定した場合 ($x^* \approx N(\mu, \sigma^2)$) 平方和	自由度	平均平方	F
学校間	0.54494	5	0.10899	13.85***	13247458	5	2649492	14.12***
残　差	23.03568	2928	0.0078674		549310804	2928	187606	
詳細な比較								
K対MTFN	0.029165	1	0.029165	3.707	647740	1	647740	3.45
H対MTFN	0.41552	1	0.41552	52.82***	10186496	1	10186496	54.30***

$F^5_{2928}(0.001) \doteqdot 4.10$.　$F^1_{2928}(0.05) \doteqdot 3.85$,　$F^1_{2928}(0.001) \doteqdot 10.85$

い．H中学校は，他の4つの中学校との間にきわめて顕著な有意差が認められる．既潮率50%に達するのが約5カ月も早いのである．

さらにまた分散の間にも有意な差があるかどうかを検定してみよう．ここでは分布はほぼ正規分布とみなしてもよいので「分散の均一性についての Bartlett の検定法」を用いるのが適当である．

この検定法は，自由度がそれぞれ $f_1, f_2, \ldots, f_p$ である互いに独立な分散推定値 $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_p^2$ を比較するにあたり，まず次式によりプールした分散推定値を計算する．

$$S^2=\sum_{i=1}^{p} f_i S_i^2/f,\ f=\sum_{i=1}^{p} f_i$$

つぎに M, C を

$$M=2.306\{f\log S^2-\sum_{i=1}^{p} f_i \log S_i^2\},$$

$$C=1+\frac{1}{3(p-1)}\left\{\sum_{1}^{p}\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f}\right\}$$

で定義すると M/C が近似的に自由度 $p-1$ の χ^2 分布に従うことを用いる．

6中学校の分散について M/C の値を計算すると

対数正規分布を仮定したとき $\frac{M}{C}=331.7^{***}$

正規分布を仮定したとき $\frac{M}{C}=354.6^{***}$

となり　$\chi_5^2\ (0.001)=20.52$　であるから，きわめて顕著な有意差が認められる．

これはH中学校の分散がとびぬけて大きいことによることは，詳細な検討を行うまでもなく直ちに認められるところである．

この結果，H中学校は，既潮率50%に達するのが他校よりずっと早く，しかも遅くまで初潮をみない生徒もいるということになり，性的成熟度に関して，散らばりが他校よりずっと大きいということになる．H中学校の学区に含まれる小学校は，6中学校中最も変化に富んでおり，旧K市街地の中心部にあるH小学校は早発の大きな要因になっていると思われる．反対に，経済的・社会的・栄養的にみて遅発要因につながるところもかなり含まれていることが，以上のような結果になっているのであろう．

§5　補　　遺

初潮開始年月日を正確に記憶している生徒がかなりいる場合の最尤推定法については[6)7)]を参照されたい．

また，調査当日における満年齢の分布については別に制約条件はないが，なるべく既潮率50%点を含む幅広い年齢範囲にわたって調査することが望ましい．ただし，ある中学校の調査データに，学区内の特定の小学校のデータだけを合併することは望ましくない．学区内全部の小学校のデータを集めることができれば，中学校のデータとあわせて，一層精度の高い推定が可能となるはずであるが，特定の小学校の分だけを合併すると，かえって推定結果をゆがめるおそれがあるから注意が肝要である．なお，月別の出生密度の違いは本論における推定結果には無関係である．

謝　辞

このたびの初潮年齢の調査にあたり，お忙しい学年初めの行事の中で，進んで調査に御協力戴いたM, T, K, F, N, H 中学校，M，F4，F5 小学校の先生方，および市教育委員会の指導主事の方に心から感謝の意を表します．

参　考　文　献

1) 北村栄美子：女子学徒の成熟促進現象に関する研究．第1編，初潮に関する統計学的研究．学校保健研究，1966, Vol. 8 (11), 29—34.

2) 佐々木直亮：初潮発来についての一観察．学校保健研究，1968, Vol. 10 (12), 552—555.

3) 松浦，川畑，三宅，宮地：初潮年齢の予測．学校保健研究，1966, Vol. 8 (8), 17—26.

4) Burrell, R. J. W., M. J. R. Healy and J. M. Tanner: Age at Menarche in South African Bantu Schoolgirls Living in the Transkei Reserve. Human Biology, 1961, Vol. 33, pp. 250—261.

5) Wilson, D. C., I. Sutherland: The Age of the Menarche. 1949, Brit. J. Soc. Med., Vol. 2, pp. 130—132.
6) Kariya, T.: Incōmplete Quantal Response Data Analysis. —Maximum Likelihood Estimation of Parameters Based ōn Interval Data—. Kawasaki Medical J. 1975, Vol. 1. No. 2.
7) 仮谷太一： An Extension of Maximum Likelihood. 日本数学会統計数学分科会予稿集, 1974. pp. 29—30.

付　録

正規分布を仮定した場合の母数推定プログラムの１例を示す．これは HITAC 10 II (8K FŌRTRAN) に則したプログラムであるが，継続欄にあたる位置にある；を除き入出力関係を少し変更すれば容易に他の Computer にかけられるはずである．また対数正規を仮定する場合には，データの読み込みの次にデータの対数変換を行なえばよい。

```
C    ; THE MENARCHE AGE DISTRIBUTION.
C    ; WE ASSUME THAT THE MENARCHE AGE DISTRIBUTION IS N (U, S2).
C    ; MAXIMUM-LIKELIHOOD ESTIMATION BASED ON INTERVAL DATA ONLY.
C    ; Y(J)<X*(J)<Z(J), J=1, . . . , N.
C    ; (Y(J), Z(J)) ARE KNOWN INTERVAL DATA, BUT X*(J) IS UNKNOWN.
C    ; X*(J) IS THE AGE AT WHICH THE MENARCHE OCCURED.
C    ; Y(J) OR Z(J) IS THE AGE ON THE DAY.
       DIMENSION Y(700), Z(700)
C    ; READ IN DATA.
       N=0
       DO 10 I=1, 1000
       READ (2, 100) IY, IZ
       IF (IY) 11, 8, 8
    8; Y(I)=IY
       Z(I)=IZ
       N=N+1
   10; CONTINUE
C    ; M. L. ESTIMATION OF PARAMETERS U AND S2 IN N(U, S2).
   11; PAUSE
       READ(2, 105) U0, S20
       CALL INCK(N, Y, Z, U0, S20)
       STOP
  100; FORMAT(2I)
  105; FORMAT(2F)

       SUBROUTINE INCK(N, Y, Z, U0, S20)
       DIMENSION Y(700), Z(700)
       SD0=SQRT(S20)
       IND=0
       WRITE(1, 900)
```

```
      WRITE(1, 905) IND, U0, S 20, SD0
C   ; ESTIMATION OF PARAMETERS.
      PAI=3. 14159265
      R 2 P=SQRT(2. *PAI)
C   ; SOLVE U 1.
  89; SUM 1=0.
      SUM 2=0.
      DO 20 I=1, N
      YI=Y(I)
      ZI=Z(I)
      SYI=(YI-U0)/SD0
      SZI=(ZI-U0)/SD0
      CALL NLQ(SYI, FAI 1)
      CALL NLQ(SZI, FAI 2)
      SYI 2=SYI*SYI
      SZI 2=SZI*SZI
      A=(-EXP(-SZI 2/2.)+EXP(-SYI 2/2.))/((FAI 2-FAI 1)*R 2 P)
      B=(-SZI*EXP(-SZI 2/2.)+SYI*EXP(-SYI 2/2.))/((FAI 2-FAI 1)*R 2P)
      SUM 1=SUM 1+A
      SUM 2=SUM 2+A*A-B
  20; CONTINUE
      DU=SD0*SUM 1/SUM 2
      U 1=U0+DU
C   ; SOLVE S 21(SD 1).
      SS 1=0.
      SS 2=0.
      DO 25 I=1, N
      YI=Y(I)
      ZI=Z(I)
      SYI=(YI-U 1)/SD0
      SZI=(ZI-U 1)/SD0
      CALL NLQ(SYI, FAI 1)
      CALL NLQ(SZI, FAI 2)
      SYI 2=SYI*SYI
      SZI 2=SZI*SZI
      B=(-SZI*EXP(-SZI 2/2.)+SYI*EXP(-SYI 2/2.))/((FAI 2-FAI 1)*R 2 P)
      C=(-SZI2*EXP(-SZI 2/2.)+SYI 2*EXP(-SYI 2/2.))/((FAI 2-FAI 1)*R 2 P)
      SS 1=SS 1+B
      SS 2=SS 2+0. 5*(B*B-B-C)
  25; CONTINUE
      DS 2=S20*SS 1/SS2
      S 21=S 20+DS 2
```

```
      SD 1=SQRT(S21)
      IND=IND+1
      WRITE(1,905) IND, U 1, S 21, SD 1
C   ; ITERATE OR NOT.
      IF(ABS((U1-U0)/U 1)-0.00001) 30, 30, 35
  30; IF(ABS((S 21-S 20)/S 21)-0.00001) 90, 90, 35
  35; U0=U 1
      S 20=S 21
      SD0=SD 1
      GO TO 89
 900; FORMAT(5/, 3 X, "No.", 12 X, "MUE", 7 X, "VARIANCE", 8 X, "STD. DEV",/)
 905; FORMAT(/, I6, 3 F 15. 7)
  90; RETURN

      SUBROUTINE NLQ(ZN, FZ)
      A 1=0. 705230784 E-01
      A 2=0. 422820123 E-01
      A 3=0. 92705272 E-02
      A 4=0. 1520143 E-03
      A 5=0. 2765672 E-03
      A 6=0. 430638 E-04
      IF(ABS(ZN)-5. 5) 4, 6, 6
   4; Z=0. 707106781*ABS(ZN)
C   ; 1/SQRT(2)=0. 7071067812
      FZ=1. 0+(A 1+(A 2+(A 3+(A 4+(A 5+A 6*Z)*Z)*Z)*Z)*Z)*Z
      IF(FZ-10000.) 5, 6, 6
   5; FZ=FZ*FZ
      FZ=FZ*FZ
      FZ=FZ*FZ
      FZ=FZ*FZ
      FZ=1. 0-1. 0/FZ
      GO TO 10
   6; FZ=1. 0
  10; IF(ZN) 15, 16, 16
  15; FZ=0. 5*(1. 0-FZ)
      GO TO 17
  16; FZ=0. 5*(1. 0+FZ)
  17; RETURN
      END
```