単独で素演算系をなす三値論理演算子を用いた三値論理関数の一展開法

川崎医科大学　物理学教室
高田　和郎・国末　　浩
（昭和50年10月31日受理）

A Method of Expanding Ternary Logical Functions with One Ternary Polypheck Operator

Kazuo Takata and Hiroshi Kunisue
Department of Physics, Kawasaki Medical School
Kurashiki 701—01, *Japan*
(*Received on Oct.* 31, 1975)

単独で素演算系をなす三値の論理演算子（三値 polypheck）を用いて任意の三値論理関数を真理値表から直接的に展開表示する一方法を見い出したので，この展開法を二三の展開例と共に示す。

この展開法を用いれば Post の展開法を用いて間接的に展開する方法よりもずっと少数の演算子数で任意の三値論理関数を展開することができる。

This paper describes an expansion method of arbitrary 3-valued logical function using one of some ternary polypheck operators in accrdance with the truth table.

As the example of using for this expansion method, a 1-variable function and a ternary half adder function are shown.

This direct expansion method is more useful for decreasing the number of necessary operators than other indirect methods.

1. まえがき

現在の汎用ディジタル電子計算機の内部においては，機械言語はもちろん数値や制御信号など，すべての情報の表現には種々の素子の二値状態を用いている。ここで，二値状態というのは電流が流れているか否か，残留磁束の方向が右まわりか左まわりか，電圧が高いか低いか，などといったある素子や回路のもつ二つの状態のことである。そして，数値や命令などの表現にはこれら二つの状態を0と1に対応させ，数値の表現には二進数として，命令の表現には二

値符号として用いている。

一方，三つの状態をもつ素子や回路を用いれば，三値を情報表現の単位とした処理機械すなわち，電子計算機の構成が可能である。ところで，同じ大きさの数を表現するのに何進法を用いれば最も経済的かという問題がある。これに対する解答は三進法が最良であり，次に二進法と四進法が同程度で続き，次に五進法，六進法の順となることが示されている[1]。ただし，これが成立するのはR進法を用いた場合の処理手数と素子制作上のコストの両者が共にその数を表現するために必要な桁数 n と R との積に比例するという仮定のもとで求めた結果である。このように三値論理は現在の二値の電子計算機に取って代わる可能性をもつ三値電子計算機の基礎を形成するということのほかに，将来ある程度のあいまいさを許す処理機械を設計する場合の基礎としても有用となるであろうし，学問的には二値論理と多値論理の橋渡し役としても重要であると思われる。つぎに，よく知られていることではあるが，論理機械の論理設計において展開式の占める位置と素演算系について簡単に述べる。電子計算機の本体部分を占める順序論理回路は組み合わせ論理回路と情報記憶素子とで構成されている。このうち組み合わせ論理回路を設計するには，まずその必要な動作を論理入力信号と論理出力信号の対応表であるところの真理値表の形に表現する。つぎに，この表を用いて論理入力信号を論理変数に，論理出力信号を論理関数に対応させて，この論理関数を論理変数と論理演算子を用いて展開式表示する。ここで使用する演算子は装置において論理素子に対応しているので，この展開式をみればどの論理素子を何個どのように接続すればよいかがわかる。すなわち，展開式は論理設計図と一対一の対応をしている。したがって最終の展開式の提示は論理設計の終了を意味することになる。論理関数を展開する場合は，適当な数種の論理演算子を選びこれらを多数回用いれば任意の論理動作を展開式に表示可能なことが証明されている。このような論理演算子の系は完全系とよばれる。またこの系のうちどの一種を欠いても完全系でなくなる場合にはもとの系は素演算系をなすといわれる。奇妙にも一種のみで素演算系をなす演算子も存在し，これは polypheck とよばれ，二値の場合には NAND 演算子と NOR 演算子がこの polypheck としてよく知られている。この論文では三値のある種の polypheck を用いて任意の三値多変数論理関数を展開式表示する一方法を提案する。

2.　従来までの三値論理関数の展開法の概説

完全系をなす基本演算子群を用いて任意の三値多変数関数を展開する方法には種々のものがある。これらのうち展開に要する演算子の種類が多いものから順に述べると，まず U_2, U_8, U_{18}, U_{24}, AND, OR の7種の演算子を用いた最小項展開法とこれに対応する最大項展開法があり，U_2, U_6, U_{13}, U_{18}, AND, OR の6種の演算子を用いた最小項展開法とこれに対応する最大項展開法[2]がある。ただし，U_i なる演算子はすべて一変数に関する演算子であり表1のように変数Xが0，1，2の場合に関数値がそれぞれ0，0，0となるものを $U_0(X)$ などとしている。また AND と OR は二値の場合と同様に AND (X, Y) ＝ MIN (X, Y) と OR

(X, Y) ≡ MAX (X, Y) の意味をもつ演算子である。これらの展開法のほかには3を法とする和と積とそれに論理定数2との三種を用いる modular 加法展開法や，これに対応する乗法展開法がある。また，原田，島田[3]も置換六種と束演算二種を用いる展開法から束演算一種と置換二種の計三種を用いる展開法を導いている。これよりもっと種類の少ないものは Post[4] によるもので，巡換一種と束演算一種の計二種を用いる方法である。以上で述べた展開法において用いる完全系は二種以上の基本演算子から成立している。すなわち polypheck を用いたものではない。

表1.　三値一変数関数の真理値表

	変数／変数値／関数名	X		
		0	1	2
関数値	$U_1(X)$	0	0	0
	$U_2(X)$	0	0	1
	⋮		⋮	
	$U_{16}(X)$	1	2	0
	⋮		⋮	
	$U_{20}(X)$	2	0	1
	⋮		⋮	
	$U_{27}(X)$	2	2	2

3.　三値 polypheck

田中，田原[5] は関数値が変数値の並び方にはよらず，変数値の真理値集合によって一義的に定まり，しかも標準展開が比較的容易なものという二つの条件を満足する三値 polypheck として表2に示すような NAND 1, NAND 2, NOR 1, NOR 2 の四種をあげている。そして

表2.　polypheck の関数値

	変数値の組み合わせ						
	(0)	(1)	(2)	(0, 1)	(0, 2)	(1, 2)	(0, 1, 2)
NAND 1	1	2	0	1	1	2	1
NAND 2	2	0	1	2	2	0	2
NOR 1	1	2	0	2	0	0	0
NOR 2	2	0	1	0	1	1	1

標準展開として Post のものを用いるとしている。しかし，Post の展開法で多変数関数を展開するには相当な繁雑さは避けられないようである。そこで，この論文では上述のような他の展開法を用いないで，はじめからこの polypheck を用いて展開する方法を導くことにする。

4.　NAND 2 を用いる展開法

任意の三値 n 変数関数 $f\ (X_1, X_2, \cdots X_n)$ を論理最大項展開に類似した形式で NAND 2 を用いて

$$f\ (X_1, X_2, \cdots, X_n) = g_0 \uparrow\uparrow g_1 \uparrow\uparrow g_2 \tag{1}$$

のように展開することにする。ただし，ここで ↑↑ は NAND 2 の演算を表わし

g_0 は $f\ (0, X_2, \cdots, X_n)$ と X_1 のみの関数

g_1 は $f\ (1, X_2, \cdots, X_n)$ と X_1 のみの関数

g_2 は $f\ (2, X_2, \cdots, X_n)$ と X_1 のみの関数

とする。NAND 2 の演算は表2から明らかなように

$$A \uparrow\uparrow B = U_{20}\{\mathrm{MIN}(A,\ B)\}$$

すなわち「被演算部の最小値のものに3を法として2を加える操作である。」ということから，これらの関数 g_i に要求される性質は

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
g_0(0, X_2, \cdots, X_n) = U_{16}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \\
g_0(1, X_2, \cdots, X_n) = 2 \\
g_0(2, X_2, \cdots, X_n) = 2
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
g_1(0, X_2, \cdots, X_n) = 2 \\
g_1(1, X_2, \cdots, X_n) = U_{16}\{f(1, X_2, \cdots, X_n)\} \\
g_1(2, X_2, \cdots, X_n) = 2
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
g_2(0, X_2, \cdots, X_n) = 2 \\
g_2(1, X_2, \cdots, X_n) = 2 \\
g_2(2, X_2, \cdots, X_n) = U_{16}\{f(2, X_2, \cdots, X_n)\}
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad (2)$$

である。なぜならば，このような性質があれば $X_1=0,\ 1,\ 2$ のそれぞれに対して（1）式の右辺は

$$U_{16}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow 2 = f(0, X_2, \cdots, X_n)$$
$$2 \uparrow\uparrow U_{16}\{f(1, X_1, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow 2 = f(1, X_2, \cdots, X_n)$$
$$2 \uparrow\uparrow 2 \uparrow\uparrow U_{16}\{f(2, X_1, \cdots, X_n)\} = f(2, X_2, \cdots, X_n)$$

となるので（1）式の左辺と一致するからである。ここでもう一度 g_0，g_1，g_2 をそれぞれ NAND 2 を用いて

$$\left.\begin{array}{l}
g_0 = U_{20}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow h_0(X_1) \\
g_1 = U_{20}\{f(1, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow h_1(X_1) \\
g_2 = U_{20}\{f(2, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow h_2(X_1)
\end{array}\right\} \quad (3)$$

の形で合成することにすれば h_0，h_1，h_2 に要求される性質は

$$\left\{\begin{array}{l} h_0(0)=2 \\ h_0(1)=0 \\ h_0(2)=0 \end{array}\right. \qquad
\left\{\begin{array}{l} h_1(0)=0 \\ h_1(1)=2 \\ h_1(2)=0 \end{array}\right. \qquad
\left\{\begin{array}{l} h_2(0)=0 \\ h_2(1)=0 \\ h_2(2)=2 \end{array}\right.$$

である。これでよい理由は $X_1=0$，1，2 のそれぞれについて（3）式は

$$g_0 = U_{20}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow 2 = U_{16}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \qquad (X_1=0)$$
$$g_0 = U_{20}\{f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow 0 = 2 \qquad (X_1=1,\ 2)$$

などとなるので（2）式の条件を満足するからである。

これらの h には

$$\left.\begin{aligned} h_0(X) &= 1 \uparrow\uparrow X \\ h_1(X) &= 1 \uparrow\uparrow (X \uparrow\uparrow X) \\ h_2(X) &= 1 \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow (X \uparrow\uparrow X)\} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

を用いればよい。ここで h の表現に NAND 2 のほかに論理定数 1 を用いているが，厳密に NAND 2 のみで表現するには（4）式の中の 1 を

$$1 = [X \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow X\} \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow (X \uparrow\uparrow X)\}] \uparrow\uparrow [X \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow X\} \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow (X \uparrow\uparrow X)\}]$$

を用いておきかえるか，または

$$\begin{aligned} h_0(X) &= \llbracket [\{(X \uparrow\uparrow X) \uparrow\uparrow X\} \uparrow\uparrow X] \uparrow\uparrow X \rrbracket \uparrow\uparrow X \\ h_1(X) &= [\{(X \uparrow\uparrow X) \uparrow\uparrow X\} \uparrow\uparrow \{X \uparrow\uparrow X\}] \uparrow\uparrow [X \uparrow\uparrow X] \\ h_2(X) &= [\{(X \uparrow\uparrow X) \uparrow\uparrow X\} \uparrow\uparrow \{(X \uparrow\uparrow X) \uparrow\uparrow X\}] \uparrow\uparrow [(X \uparrow\uparrow X) \uparrow\uparrow X] \end{aligned}$$

を用いる。いま（4）式の X の代りに X_1 を用いこれを（3）式に代入し，（3）式の g_i を（1）式に代入して $\mathrm{U}_{20}(Y) = Y \uparrow\uparrow Y$ を用いると

$$\begin{aligned} & f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ & \quad = [\{f(0, X_2, \cdots, X_n) \uparrow\uparrow f(0, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow \{1 \uparrow\uparrow X_1\}] \\ & \quad \uparrow\uparrow [\{f(1, X_2, \cdots, X_n) \uparrow\uparrow f(1, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow \{1 \uparrow\uparrow (X_1 \uparrow\uparrow X_1)\}] \\ & \quad \uparrow\uparrow [\{f(2, X_2, \cdots, X_n) \uparrow\uparrow f(2, X_2, \cdots, X_n)\} \uparrow\uparrow \{1 \uparrow\uparrow (X_1 \langle\!\langle X_1 \uparrow\uparrow X_1 \rangle\!\rangle)\}) \end{aligned}$$

のように n 変数関数を X_1 と X_1 を含まない $(n-1)$ 変数関数の NAND 2 演算で表わすことができる。この式の $(n-1)$ 変数関数の部分を同様に X_2 で展開すると上式は

$$\begin{aligned} & f(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ & \quad = [\llbracket \{(\langle\!\langle f(0,0,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,0,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_0(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(0,1,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,1,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_1(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(0,2,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,2,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_2(X_2))\} \\ & \quad\ \uparrow\uparrow \{(\langle\!\langle f(0,0,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,0,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_0(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(0,1,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,1,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_1(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(0,2,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(0,2,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_2(X_2))\} \rrbracket \uparrow\uparrow h_0(X_1)] \\ & \quad \uparrow\uparrow [\llbracket \{(\langle\!\langle f(1,0,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,0,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_0(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(1,1,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,1,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_1(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(1,2,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,2,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_2(X_2))\} \\ & \quad\ \uparrow\uparrow \{(\langle\!\langle f(1,0,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,0,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_0(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(1,1,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,1,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_1(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(1,2,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(1,2,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_2(X_2))\} \rrbracket \uparrow\uparrow h_1(X_1)] \\ & \quad \uparrow\uparrow [\llbracket \{(\langle\!\langle f(2,0,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(2,0,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_0(X_2)) \\ & \qquad \uparrow\uparrow (\langle\!\langle f(2,1,X_3,\cdots,X_n) \uparrow\uparrow f(2,1,X_3,\cdots,X_n) \rangle\!\rangle \uparrow\uparrow h_1(X_2)) \end{aligned}$$

$$\uparrow\uparrow((\!(f(2,2,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,2,X_3,\cdots,X_n))\!)\uparrow\uparrow h_2(X_2))\}$$

$$\uparrow\uparrow\{((\!(f(2,0,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,0,X_3,\cdots,X_n))\!)\uparrow\uparrow h_0(X_2))$$

$$\uparrow\uparrow((\!(f(2,1,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,1,X_3,\cdots,X_n))\!)\uparrow\uparrow h_1(X_2))$$

$$\uparrow\uparrow((\!(f(2,2,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,2,X_3,\cdots,X_n))\!)\uparrow\uparrow h_2(X_2))\}\rrbracket\uparrow\uparrow h_2(X_1)] \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

となる。ここで $h(X)$ のとる値が0か2の場合に成立する公式

$$[\llbracket\{(A\uparrow\uparrow B)\uparrow\uparrow(C\uparrow\uparrow D)\uparrow\uparrow(E\uparrow\uparrow F)\}\uparrow\uparrow\{(A\uparrow\uparrow B)\uparrow\uparrow(C\uparrow\uparrow D)\uparrow\uparrow(E\uparrow\uparrow F)\}\rrbracket\uparrow\uparrow h]\uparrow\uparrow P$$
$$=(A\uparrow\uparrow B\uparrow\uparrow h)\uparrow\uparrow(C\uparrow\uparrow D\uparrow\uparrow h)\uparrow\uparrow(E\uparrow\uparrow F\uparrow\uparrow h)\uparrow\uparrow P$$

を用いて（5）式を簡略化すると

$$
\begin{aligned}
&f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\
&\quad=[\{f(0,0,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(0,0,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_0(X_1)\uparrow\uparrow h_0(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(1,0,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(1,0,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_1(X_1)\uparrow\uparrow h_0(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(2,0,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,0,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_2(X_1)\uparrow\uparrow h_0(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(0,1,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(0,1,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_0(X_1)\uparrow\uparrow h_1(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(1,1,X_3,\cdots,X_n(\uparrow\uparrow f(1,1,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_1(X_1)\uparrow\uparrow h_1(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(2,1,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,1,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_2(X_1)\uparrow\uparrow h_1(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(0,2,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(0,2,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_0(X_1)\uparrow\uparrow h_2(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(1,2,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(1,2,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_1(X_1)\uparrow\uparrow h_2(X_2)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(2,2,X_3,\cdots,X_n)\uparrow\uparrow f(2,2,X_3,\cdots,X_n)\}\uparrow\uparrow h_2(X_2)\uparrow\uparrow h_2(X_2)] \qquad \cdots\cdots\cdots(6)
\end{aligned}
$$

を得る。以下，X_3，X_4，…，X_n について逐次展開すると同様な操作で

$$
\begin{aligned}
&f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\
&\quad=[\{f(0,0,\cdots,0)\uparrow\uparrow f(0,0,\cdots,0)\}\uparrow\uparrow h_0(X_1)\uparrow\uparrow h_0(X_2)\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow h_0(X_n)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(1,0,\cdots,0)\uparrow\uparrow f(1,0,\cdots,0)\}\uparrow\uparrow h_1(X_1)\uparrow\uparrow h_0(X_2)\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow h_0(X_n)]\\
&\quad\vdots\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(2,2,\cdots,2)\uparrow\uparrow f(2,2,\cdots,2)\}\uparrow\uparrow h_2(X_1)\uparrow\uparrow h_2(X_2)\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow h_2(X_n)]
\end{aligned}
$$

となり，$h_0(X)$ などに（4）を用いると最終的な展開式として

$$
\begin{aligned}
&f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\\
&\quad=[\{f(0,0,\cdots,0)\uparrow\uparrow f(0,0,\cdots,0)\}\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_1)\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_2)\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_n)]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(1,0,\cdots,0)\uparrow\uparrow f(1,0,\cdots,0)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)\}\ \uparrow\uparrow 1\uparrow\uparrow X_2)\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_n)]\\
&\quad\vdots\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{f(2,2,\cdots,2)\uparrow\uparrow f(2,2,\cdots,2)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow(\!(X_1\uparrow\uparrow X_1)\!))\}\uparrow\uparrow\\
&\qquad\qquad\cdots\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_n\uparrow\uparrow(\!(X_n\uparrow\uparrow X_n)\!))\}] \qquad \cdots\cdots\cdots(7)
\end{aligned}
$$

を得る。

5. NAND 2 を用いた展開例

三値一変数関数 $f(X)$ の場合には前述の展開式は

$$
\begin{aligned}
f(X)=&[\{f(0)\uparrow\uparrow f(0)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X\}]\\
&\uparrow\uparrow[\{f(1)\uparrow\uparrow f(1)\}\uparrow\uparrow\ 1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow X)\}]\\
&\uparrow\uparrow[\{f(2)\uparrow\uparrow f(2)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow((X\uparrow\uparrow X)))\}]
\end{aligned}
$$

となる。この式を用いて，たとえば，$\mathrm{U}_3(X)$ を展開すると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_3(X)=&[\{0\uparrow\uparrow 0\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X\}]\\
&\uparrow\uparrow[\{0\uparrow\uparrow 0\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow X)\}]\\
&\uparrow\uparrow[\{2\uparrow\uparrow 2\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow((X\uparrow\uparrow X)))\}]\\
&=[2\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X\}]\\
&\uparrow\uparrow[2\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow X)\}]\\
&\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow((X\uparrow\uparrow X)))\}]\\
&=[\{1\uparrow\uparrow X\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X\}\\
&\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow X)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow X)\}]\\
&\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow\{X\uparrow\uparrow(X\uparrow\uparrow((X\uparrow\uparrow X)))\}]
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots\cdots(8)
$$

のような展開式が得られる。ただし，上式の変形の過程において

$$
\left.
\begin{aligned}
&0\uparrow\uparrow A=2\\
&2\uparrow\uparrow A=A\uparrow\uparrow A\\
&2\uparrow\uparrow A\uparrow\uparrow B=A\uparrow\uparrow B
\end{aligned}
\right\}\qquad(9)
$$

の関係を用いて式を簡略化した。

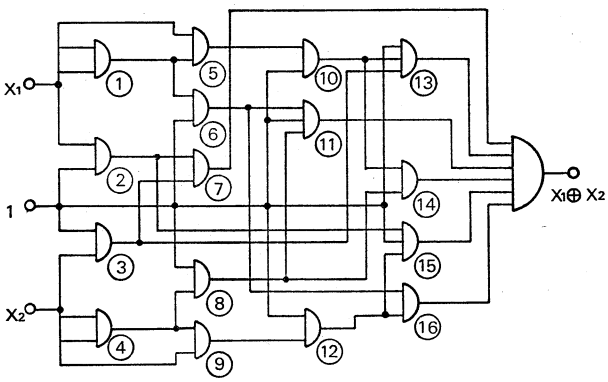
また，三値二変数関数の展開例として「3を法とした和」すなわち，三値半加算器構成のための展開式 $X_1\oplus X_2$ をとりあげると，表3の真理値表と（9）式の関係を用いてただちに

$$
\begin{aligned}
&X_1\oplus X_2\\
&\quad=[\{(1\uparrow\uparrow X_1)\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_2)\}]\\
&\quad\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow((X_1\uparrow\uparrow X_1)))\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X_2\}]\\
&\quad\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)\}]\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow((X_1\uparrow\uparrow X_1)))\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)\}]\\
&\quad\uparrow\uparrow[1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X_1\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow((X_2\uparrow\uparrow X_2)))\}\\
&\quad\uparrow\uparrow[\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow((X_2\uparrow\uparrow X_2)))\}]
\end{aligned}
$$

表3. 三値半加算器の真理値表

		X_2		
		0	1	2
X_1	0	0	1	2
	1	1	2	0
	2	2	0	1

を得る。上式から $X_1\oplus X_2$ の論理回路は図1に示すような回路を設計すればよいことがわかる。



① $X_1\uparrow\uparrow X_1$
② $1\uparrow\uparrow X_1$
③ $1\uparrow\uparrow X_2$
④ $X_2\uparrow\uparrow X_2$
⑤ $X_1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)$
⑥ $1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)$
⑦ $(1\uparrow\uparrow X_1)\uparrow\uparrow(1\uparrow\uparrow X_2)$
⑧ $1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)$
⑨ $X_2\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)$
⑩ $1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow((X_1\uparrow\uparrow X_1)))$
⑪ $1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)\}$
⑫ $1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow((X_2\uparrow\uparrow X_2)))$
⑬ $1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow((X_1\uparrow\uparrow X_1)))\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X_2\}$
⑭ $\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow((X_1\uparrow\uparrow X_1)))\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow X_2)\}$
⑮ $1\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow X_1\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow((X_2\uparrow\uparrow X_2)))\}$
⑯ $\{1\uparrow\uparrow(X_1\uparrow\uparrow X_1)\}\uparrow\uparrow\{1\uparrow\uparrow(X_2\uparrow\uparrow((X_2\uparrow\uparrow X_2)))\}$

図1.　NAND 2 を用いた三値半加算器

6.　他の polypheck を用いる展開式

他の polypheck すなわち，NAND 1 や NOR 2 についても同様な考察により展開式を導くことができる。これらの場合の展開式は NAND 1 の演算記号として↑を，NOR 2 の演算記号として↓↓を用いることにして結果のみ記せば，それぞれ

$$
\begin{aligned}
&f(X_1, X_2, \cdots, X_n)\\
&\quad=[\![\mathrm{U}_{16}[f(0,0,\cdots,0)]\uparrow\{(1\uparrow X_1)\uparrow(1\uparrow X_1)\}\uparrow\{(1\uparrow X_2)\uparrow(1\uparrow X_2)\}\uparrow\cdots\uparrow\{(1\uparrow X_n)\uparrow(1\uparrow X_n)\}]\!]\\
&\quad\uparrow[\![\mathrm{U}_{16}[f(1,0,\cdots,0)]\uparrow[\{1\uparrow(((X_1\uparrow X_1))\uparrow((X_1\uparrow X_1)))\}\{\uparrow 1\uparrow(((X_1\uparrow X_1))\uparrow((X_1\uparrow X_1)))\}]\\
&\qquad\quad\uparrow[(1\uparrow X_2)\uparrow(1\uparrow X_2)]\uparrow\cdots\uparrow(1\uparrow X_n)\uparrow(1\uparrow X_n)]]\!]\\
&\quad\vdots\\
&\quad\uparrow[\![\mathrm{U}_{16}[f(2,2,\cdots,2)]\uparrow[\{1\uparrow(X_1\uparrow X_1)\}\uparrow\{1\uparrow(X_1\uparrow X_1)\}]\uparrow[\{1\uparrow(X_2\uparrow X_2)\}\uparrow\{1\uparrow(X_2\uparrow X_2)\ ]\\
&\qquad\quad\uparrow\cdots\uparrow[\{1\uparrow(X_n\uparrow X_n)\}\uparrow\{1\uparrow(X_n\uparrow X_n)\}]]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(X_1, X_2, \cdots, X_n)\\
&\quad =[\![U_{20}[f(0, 0, , \cdots, 0)] \downarrow\downarrow [\{1 \downarrow\downarrow (X_1 \downarrow\downarrow X_1)\} \downarrow\downarrow \{1 \downarrow\downarrow (X_1 \downarrow\downarrow X_1)\}] \downarrow\downarrow [\{1 \downarrow\downarrow (X_2 \downarrow\downarrow X_2)\}\\
&\qquad\quad \downarrow\downarrow \{1 \downarrow\downarrow (X_2 \downarrow\downarrow X_2)\} \downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow [\{1 \downarrow\downarrow (X_n \downarrow\downarrow X_n)\} \downarrow\downarrow \{1 \downarrow\downarrow (X_n \downarrow\downarrow X_n)\}]]\!]\\
&\quad \downarrow\downarrow [\![U_{20}[f(1, 0, \cdots, 0)] \downarrow\downarrow [\{(X_1 \downarrow\downarrow X_1) \downarrow\downarrow (1 \downarrow\downarrow ((X_1 \downarrow\downarrow X_1)))\} \downarrow\downarrow \{1 \downarrow\downarrow 1\}]\\
&\qquad\quad \downarrow\downarrow [\{1 \downarrow\downarrow (X_2 \downarrow\downarrow X_2)\} \downarrow\downarrow \{1 \downarrow\downarrow (X_2 \downarrow\downarrow X_2)\}] \downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow [\{1 \downarrow\downarrow X_n \downarrow\downarrow X_n)\} \downarrow\downarrow 1 \downarrow\downarrow (X_n \downarrow\downarrow X_n)\}]]\!]\\
&\quad \vdots\\
&\quad \downarrow\downarrow U_{20}[f(2, 2, \cdots, 2)] \downarrow\downarrow [(1 \downarrow\downarrow X_1) \downarrow\downarrow (1 \downarrow\downarrow X_1)] \downarrow\downarrow [(1 \downarrow\downarrow X_2) \downarrow\downarrow (1 \downarrow\downarrow X_2)]\\
&\qquad\quad \downarrow\downarrow \cdots \downarrow\downarrow [(1 \downarrow\downarrow X_n) \downarrow\downarrow (1 \downarrow\downarrow X_n)]]\!]
\end{aligned}
$$

となる。

7. 結　　語

三値の polypheck NAND2, NOR 2, NAND 1 をそれぞれ単独で用いる三値 n 変数関数の展開法を各一種づつ計三種を導き出した。

真理値表が与えられれば，この展開法を用いて即座にその表を論理関数式に書き下すことができる。

つぎに，これらの展開式について留意事項を述べると，

(1) これらの展開式のうちで，前回報告した NOR 1[6] を用いるものと今回の NAND 2 を用いるものはNOR 2 と NAND 1 を用いるものに比して簡単である。

(2) 展開式は一応，変数と polypheck のみで表現できることを示してはあるが，実際に論理回路を組み立てる場合には，論理定数の 1 は容易に何度でも使用できることから，回路構成にあたっては 1 も用いた展開式を使用する方が論理素子の数が少なくてすむ。

(3) $U_3(X)$ をこの展開式を用いて表現すると（8）式となるが，これは簡潔に表現されているところの（4）式の $h_2(X)$ と同じ論理関数である。このことはこの展開法によって得られた式が最も簡略化された式であるとは限らないことを示しており，論理関数の簡略化についての系統的な方法を見出すことがこの方面の今後の課題の一つとして残されている。

文　　献

1）小島久郎；ディジタル計算機入門（オーム社） p. p. 91～93.

2）E. Mühldorf; "Pernäre Schaltalgebra" Arch, elekt Übertragung **12**, 3, a. 138 (März 1958).

3）原田尚文，島田良作；"三線式三値論理回路について" 電子通信学会論文誌 Vol. **52-C** No. 1, p. p. 17～24 (1969).

4）E. L. Post; "Introduction to a general theory of elementary propositions" Amer. S. Math. **43** p. 163 (1921).

5）田中末雄，田原道夫；"三値論理関数の完全系と polypheck" 電子通信学会論文誌 Vol. **53-C**, No. 2, p. 111 (1970).

6）高田和郎，国末浩；電子通信学会論文誌に投稿予定。