種々のスピン系における『母関数の方法によるグリーン関数理論』

川崎医科大学　物理学教室
近　藤　芳　朗

（昭和50年10月31日受理）

A Generating Green Function Theory in Spin Systems

Yoshiro KONDO
Department of Physics, Kawasaki Medical School,
Kurashiki 701-01, Japan

(*Received on Oct.* 31, 1975)

一イオン型一軸的異方性エネルギーをもつハイゼンベルク強磁性体に対する「母関数の方法によるグリーン関数理論」が紹介される。この方法によると系に与える異方性の効果を厳密に取り入れることができ，またモーメント母関数 $\Omega(x)=\langle\exp(xS^z)\rangle$ を一般のスピンに対して容易に求めることができる。この方法の他のスピン系への応用，即ち(ｉ)一軸的異方性エネルギーだけをもつ相互作用のないスピン系，(ii)キューリー・ワイス模型及び(iii)イージング模型等への応用についても論じられる。

このようにして得た母関数$\Omega(x)$はそれから生み出されるはずのすべてのモーメント$\langle(S^z)^m\rangle$ $(m=1,2,\cdots 2S)$ を含み，これらのモーメントを決めるつじつまを合わせる方程式は $\Omega(x)$ を繰り返し微分することにより得られる。これらの方程式は $2S$ 個の連立超越方程式となるので，これらを一般的に解くことは難しい。しかし，相互作用のないスピン系に対しては具体的な $\Omega(x)$ の表示が，またキューリー・ワイス模型に対しては $\Omega(x)$ の漸近形が与えられる。

It is introduced that a method of generating Green functions for the Heisenberg ferromagnet with uniaxial anisotropy of one-ion type. This method enables us to treat the anisotropy effects exactly and to obtain the moment generating function $\Omega(x)=\langle\exp(xS^z)\rangle$ easily for general spin. Applications of this method to other spin systems, namely a non-interactive spin system with the uniaxial anisotropy only, the Curie-Weiss model, and the Ising model, are described.

Thus, the function $\Omega(x)$ obtained involves all the moments $\langle(S^z)^m\rangle(m=1,2,\cdots,2S)$, $2S$ self-consistent equations to determine the moments are obtained by differentiating $\Omega(x)$ in succession. It is difficult to solve this $2S$-coupled transcendental equations. But an explicit representation of $\Omega(x)$ is derived in the non-interactive spis system and in the Curei-Weiss model an asymptotic form of $\Omega(x)$.

§1. 序

強磁性体のハイゼンベルク模型は二次の相転移を示す典型的な例であるが，まだ一次元系においてさえも厳密解は得られていない。したがってハイゼンベルク模型を研究することは相転移の機構を解明する上で大変重要であって今日まで多くの研究者によっていろいろな近似方法で研究されてきた。なかでも二時間グリーン関数の方法はボゴリュウボフ・チャブリコフ[1]によってハイゼンベルク模型に適用されて以来，多体問題を解く強力な武器として使用されてきた。

ハイゼンベルク模型の適用できる物質は MnF_2, $RbMnF_3$, K_2NiF_4 など多く存在するが，いずれも多少なりとも異方性エネルギーをもっている。上記の物質のそれはいずれも一イオン型一軸的であるがこの型の異方性は単に磁気モーメントの容易軸を与えるというだけでなく，系の挙動に大きな影響を与える。たとえば，電子スピン共鳴の吸収線に構造をもたらし[2],[3]，また容易軸に垂直なスピンの揺ぎを押える結果，系の相転移に関して間接の影響を及ぼす[4]。このように一イオン型一軸的異方性エネルギー（以下一軸的異方性エネルギーという）をもつ系は大変興味深いのであるが，グリーン関数の方法による従来の理論は異方性の効果を正しく評価するという点において満足のいくものではなかった。そこで異方性の効果を正しく取り入れるためのグリーン関数理論が T. Murao and T. Matsubara[5], J. F. Devlin[6], S. B. Haly and P. Erdos[7] と M. Tanaka and Y. Kondo[8] 等によって提出された。これらの理論の難点はいずれも複雑でこみ入っているということである。この難点は Y. Kondo and M. Tanaka[9] によってグリー関数の母関数を導入するという新しい方法で解消された。

このような背景で導入された母関数の方法によるグリーン関数理論を種々のスピン系に対して紹介するのがこの論文の目的である。我々の方法では母関数を導入したので問題の見通しが大変良くなった。たとえば，従来のグリーン関数理論においては取り扱いが困難であった異方性グリーン関数が本質的に母関数の導関数とし与えられるのでこれに対して何ら近似を行う必要がなくなったことである。こうして問題は異方性の存在しない体系の問題に帰着された。

§2ではグリーン関数の方法についての基礎知識が与えられ，§3, §4ではスピン系における「グリーン関数の母関数による方法」の一般論を一軸的異方性をもつハイゼンベルク強磁性体への応用を例にとって紹介する。§4ではモーメント母関数 $\Omega(x)$ の形式解が求められる。この方法の応用として相互作用のない系に対する $\Omega(x)$ の具体的な表式が任意のスピンに対して§5において，またキューリー・ワイス模型に対する $\Omega(x)$ の具体的な表式及びその漸近形が§6において求められる。§7ではイージング模型における種々のスピン相関関数の間の関係式が求められる。

§2. グリーン関数

スピン系において有力な方法である二時間グリーン関数法における基礎知識の簡単な復習をしておく。二つの演算子 A, B に関する二時間グリーン関数は

$$\langle\!\langle A(t)\,;\,B(0)\rangle\!\rangle=-i\theta(t)\langle[A(t),\,B(0)]\rangle \tag{1}$$

によって定義される。ここで $A(t)$, $B(0)$ はハイゼンベルク表示による演算子であって

$$A(t)=\exp(iHt)A\exp(-iHt), \tag{2a}$$

$$B(0)=0 \tag{2b}$$

で与えられる。ここで $(h/2\pi)=1$ なる単位系を選んだが以下この単位系によって記述することにする。$\theta(t)$ は階段関数

$$\theta(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{3}$$

を表し，また二つの括弧 [,] 及び $\langle\cdots\rangle$ は

$$\text{交換子}\quad [A,B]=AB-BA, \tag{4}$$

$$\text{熱平均}\quad \langle Q\rangle=TrQ\exp(-\beta H)/Tr\exp(-\beta H) \tag{5}$$

を意味し，k_B をボルツマン定数，T を系の絶対温度とすれば $\beta=1/(k_BT)$ である。

グリーン関数 (1) の ω に関するフーリェ成分を $\langle\!\langle A\,;\,B\rangle\!\rangle_\omega$ によって表すと，それが運動方程式

$$\omega\langle\!\langle A\,;\,B\rangle\!\rangle_\omega=\langle[A,\,B]\rangle+\langle\!\langle[A,H]\,;\,B\rangle\!\rangle_\omega \tag{6}$$

を満たすことは (1) より容易に導びかれる。ただし任意の関数 $f(t)$ のフーリェ変換は次式によって定義した。

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\exp(i\omega t)\,dt. \tag{7}$$

方程式 (6) を解いて $\langle\!\langle A\,;\,B\rangle\!\rangle_\omega$ を ω の関数として求めることができれば，相関関数 $\langle B(0)A(t)\rangle$ はスペクトル定理

$$\langle B(0)A(t)\rangle=\oint\frac{d\omega}{2\pi i}\langle\!\langle A\,;\,B\rangle\!\rangle_\omega f(\omega)\exp(-i\omega t) \tag{8}$$

から求まる。ただし

$$f(\omega)=\frac{1}{\exp(\beta\omega)-1} \tag{9}$$

であり，積分は ω の実軸を含みかつ原点を除く積分路を左回りに行うものとする。

§3. 母関数の方法による定式化

スピン系におけるグリーン関数の母関数による方法を説明するために次式で与えられるハミルトニアンをもつ体系を例にとって考える。

$$H=-\omega_0\sum_i S_i^z-\sum_{i,j}J_{i,j}(\mathbf{S}_i\cdot\mathbf{S}_j)-D\sum_i (S_i^z)^2. \tag{10}$$

第一項はゼーマン・エネルギーを表し，$\omega_0=\mu_B H$ である。ただし，μ_B はボーア磁子を，H は Z 方向にかけた外部磁場を表す。第二項はハイゼンベルクの交換相互作用と呼ばれ $\mathbf{S}_i$，$\mathbf{S}_j$ はそれぞれ i 番目，j 番目の格子点の分子に対するスピン演算子を表し S_i^x, S_i^y, S_i^z；S_j^x, S_j^y, S_j^z はそれらの x—，y—，z—成分を表す。特にスピン演算子の z—成分の固有値は S, $S-1$, $S-2$, $\cdots$, $-S$ であるとする。第三項は z 軸を容易軸にする一軸的異方性エネルギーである。

系の磁気的な情報を生みだすグリーン関数の母関数として

$$\langle\langle S_i^+(t)\exp\{xS_i^z(t)\}\,;\,S_j^-(0)\rangle\rangle_\omega=-i\theta(t)\langle[S_i^+(t)\exp\{xS_i^z(t)\},S_j^-(0)]\rangle \tag{11}$$

を導入する。ただし

$$S_i^\pm=S_i^x\pm iS_i^y \tag{12}$$

である。スピン演算子の添字 i は格子点の番号を，それ以外の i は虚数単位を表す。母関数(11)のフーリェ成分は運動方程式

$$\begin{aligned}\omega\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega=&\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z\},S_j^-]\rangle\\&+\langle\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z\},H]\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega\end{aligned} \tag{13}$$

を満たす。ここで関係式

$$[S_i^+,S_i^-]=2S_i^z\delta_{i,j}\,,\ [S_i^z,S_j^\pm]=\pm S_i^\pm\delta_{i,j} \tag{14}$$

を用いると

$$\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z\},S_j^-]\rangle=I(x)\delta_{i,j}\,, \tag{15a}$$

$$I(x)=\langle[S^+\exp\{xS^z\},S_j^-]\rangle\,, \tag{15b}$$

$$\begin{aligned}&\langle\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z\},H]\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega\\&=\omega_0\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S^{-z}\rangle\rangle_\omega+D\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}(2S_i^z+1)\,;\,S^-{}_j\rangle\rangle_\omega\\&\quad-\sum_d J_{i,i+d}\langle\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z\},S_i^-]S_{d+i}^+\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega\\&\quad+2\sum_d J_{i,i+d}\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}S^z{}_{i+d}\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega\\&\quad-\sum_d J_{i,i+d}\langle\langle S_i^+[\exp\{xS_i^z\},S_i^+]S_{i+d}^-\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega\end{aligned} \tag{16}$$

となる。(15b) においては系の並進対称性より $I(x)$ は添字 i には依存しないので省いた。

(16)の右辺には母関数(11)とは異る新しい高次のグリーン関数が現れている。したがって，これらに対しても(13)と同様の運動方程式をたてる必要があるが，そうすればまた新しいより高次のグリーン関数が現れる。このような手続きを続り返すならば，無限に続く方程式の鎖ができる。この方程式の鎖をどこかで断ち切らなければ方程式は解けない。そこで(16)の段階で方程式の鎖を切るという切断（decoupling）を行う。切断の要領は次の通りである[4)]。A_i，B_l をそれぞれ i 番目，l 番目の格子点だけに関する演算子とするとき

$$\langle\!\langle A_i B_l\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega \longrightarrow \langle A_i\rangle\langle\!\langle B_l\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega + \langle B_l\rangle\langle\!\langle A_i\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega \quad i \neq l \tag{17}$$

のように切断する。この近似はチャブリコフ近似を拡張したもので，異なる格子点間のスピン相関を無視する近似に等しい。切断(17)を(16)に適用すると次のようになる。

$$\begin{aligned}&\langle\!\langle [S_i^+ \exp\{xS_i^z\},\,H]\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega\\ &\longrightarrow (\omega_0+D)\langle\!\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega + 2D\frac{d}{dx}\langle\!\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega\\ &+2Jz\langle S^z\rangle\langle\!\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega - J\cdot I(x)\sum_{d}\langle\!\langle S_{i+d}^+\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega .\end{aligned} \tag{18}$$

ここで交換相互作用は最隣接格子間のみに働き，その大きさはいずれも等しく J，最隣接格子点の数を z であるとした。今

$$G_{i,j}(x,\omega)=\langle\!\langle S_i^+\exp\{xS_i^z\}\,;\,S_j^-\rangle\!\rangle_\omega, \tag{19}$$

$$E_0=\omega_0+D+2Jz\langle S^z\rangle \tag{20}$$

とおくならば(13)は(15)，(18)を用いて

$$\begin{aligned}(\omega-E_0)G_{i,j}(x,\omega) &= I(x)\delta_{i,j} + 2D\frac{d}{dx}G_{i,j}(x,\omega)\\ &\quad - J\cdot I(x)\sum_{d}G_{i+d,j}(o,\omega)\end{aligned} \tag{21}$$

と書き下せる。系の並進対称性を考慮して，空間的なフーリェ変換を(21)に施すならば

$$\begin{aligned}(\omega-E_0)G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega) &= 2D\frac{d}{dx}G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)\\ &\quad + I(x)\{1-J(\boldsymbol{k})G_{\boldsymbol{k}}(o,\omega)\}\end{aligned} \tag{22}$$

を得る。ただし $G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)$，$J(\boldsymbol{k})$ は次式で定義される。

$$G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)=\sum_{r_i-r_i}G_{i,j}(x,\omega)\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_i)\}, \tag{23}$$

$$J(\boldsymbol{k})=J\sum_{\boldsymbol{d}}\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{d}\} \tag{24}$$

(22)は x に関する一階の線型微分方程式となっている。これが母関数を導入した利点である。異方性に関する効果は D を含む項を通して現れるが，それは本質的に母関数の導関数という形で入っているのが(22)からわかる。母関数を使わない従来の理論では，この項は高次のグリーン関数（(16) の右辺の第二項において $x=0$ としたもの）になっていて，それに対し

てさらに運動方程式をたてねばならない。このグリーン関数を異方性グリーン関数と呼ぶが，これは同じ格子点の演算子だけから成るグリーン関数なので一般の場合とは異なりそれの運動方程式の鎖は閉じる。その結果は（$2S$）元の連立方程式となる。

さて，演算子 S_i^z には恒等式

$$S_i^+\prod_{m=-S}^{S-1}(S_i^z-m)=0 \tag{25}$$

が存在するので，$G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)$ には次のような境界条件

$$\left\{\prod_{m=-S}^{S-1}\left(\frac{d}{dx}-m\right)\right\}\cdot G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)=0 \tag{26}$$

が存在することになる。今

$$(\alpha)_m=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m-1) & m\geqq 1\\ 1 & m=0\end{cases} \tag{27}$$

で定義される記号 $(\alpha)_m$ を導入すると境界条件(26)は $(d/dx-S+1)_{2S}\cdot G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)=0$ と表せる。

(22)の両辺に演算子 $(d/dx-S+1)_{m-1}$ を作用させると漸化式

$$G_{\boldsymbol{k}}^m(x,\omega)=(\omega^*-S+m)G_{\boldsymbol{k}}^{m-1}(x,\omega)-\frac{1}{2D}F_{\boldsymbol{k}}^{m-1}(x,\omega) \tag{28}$$

を得る。ただし

$$G_{\boldsymbol{k}}^m(x,\omega)=\left(\frac{d}{dx}-S+1\right)_m\cdot G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega), \tag{29}$$

$$F_{\boldsymbol{k}}^m(x,\omega)=\{1-J(\boldsymbol{k})G_{\boldsymbol{k}}(o,\omega)\}I^m(x), \tag{30}$$

$$I^m(x)=\left(\frac{d}{dx}-S+1\right)_m\cdot I(x), \tag{31}$$

$$\omega^*=\frac{1}{2D}(\omega-E_0) \tag{32}$$

である。記法(29)によると境界条件は簡単に

$$G_{\boldsymbol{k}}^{2S}(x,\omega)=0 \tag{33}$$

となる。こうして問題は境界条件(33)のもとで漸化式(28)を解くことに帰着された。

$G_{\boldsymbol{k}}^{2S}(x,\omega)$ から(28)を繰り返し使って次数 $2S$ を順次下げてゆくと

$$\begin{aligned}0&=G_{\boldsymbol{k}}^{2S}(x,\omega)\\&=(\omega^*+S)G_{\boldsymbol{k}}^{2S-1}-\frac{1}{2D}F_{\boldsymbol{k}}^{2S-1}\\&=(\omega^*+S)(\omega^*+S-1)G_{\boldsymbol{k}}^{2S-2}-\frac{1}{2D}\{(\omega^*+S)F_{\boldsymbol{k}}^{2-2S}+F_{\boldsymbol{k}}^{2S-1}\}\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=(\omega^*+S)(\omega^*+S-1)\cdots(\omega^*-S+1)G_{\boldsymbol{k}}^0$$

$$-\frac{1}{2D}\{\omega^*+S)\cdots(\omega^*-S+2)F_{\boldsymbol{k}}^0+\cdots+F_{\boldsymbol{k}}^{2S-1}\}$$

となる。$G_{\boldsymbol{k}}^0(x,\omega)=G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)$ だから

$$G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)=\frac{1}{2D}\left\{\frac{F_{\boldsymbol{k}}^0}{\omega^*-S+1}+\frac{F_{\boldsymbol{k}}^1}{(\omega^*-S+1)(\omega^*-S+2)}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{F_{\boldsymbol{k}}^{2S-1}}{(\omega^*-S+1)\cdots(\omega^*+S)}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{2S}\left\{\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{\omega-\omega_m}\right\}(2D)^{n-1}F_{\boldsymbol{k}}^{n-1}(x,\omega)$$

$$=\{1-J(\boldsymbol{k})G_{\boldsymbol{k}}(o,\omega)\}\sum_{n=1}^{2S}\left\{\prod_{n=1}^{n}\frac{1}{\omega-\omega_m}\right\}(2D)^{n-1}I^{n-1}(x) \tag{34}$$

となる。ただし

$$\omega_m=E_0+2D(S-m)\qquad -S\leqq m\leqq S \tag{35}$$

である。(34)において $x=0$ とすると

$$G_{\boldsymbol{k}}(o,\omega)=\frac{\Delta(o,\omega)}{1+J(\boldsymbol{k})\Delta(o,\omega)} \tag{36}$$

を得る。ただし

$$\Delta(x,\omega)=\sum_{n=1}^{2S}\left\{\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{\omega-\omega_m}\right\}(2D)^{n-1}I^{n-1}(x) \tag{37}$$

である。この結果を(34)に代入して

$$G_{\boldsymbol{k}}(x,\omega)=\frac{\Delta(x,\omega)}{1+J(\boldsymbol{k})\Delta(o,\omega)} \tag{38}$$

を得る。これで近似(17)のもとでハミルトニアン(10)に対する系のグリーン関数の母関数が求まったわけである。次節で(38)からモーメント母関数が求められる。

§4. モーメント母関数の形式解

この節では前節の結果を用いて系の熱力学的性質を決定するモーメント母関数

$$\Omega(x)=\langle\exp\{xS^z\}\rangle \tag{39}$$

の形式解を求めることにする。(38)より

$$G_{i,j}(x,\omega)=\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{\Delta(x,\omega)\exp\{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\}}{1+J(\boldsymbol{k})\Delta(o,\omega)} \tag{40}$$

が成立する。ここで $i=j$ としてスペクトル定理(8)を用いると

$$\langle S^- S^+ \exp(xS^z)\rangle = \sum_{n=1}^{2S} f_n \cdot I^{n-1}(x) \tag{41}$$

を得る。ここで系の並進対称性より左辺のスピン演算子の添字 i は省略した。また f_n は

$$f_n = \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k} \oint \frac{d\omega}{2\pi i} \cdot \frac{f(\omega)(2D)^{n-1}}{1+J(\boldsymbol{k})\Delta(o,\omega)} \cdot \prod_{m=1}^{n} \frac{1}{\omega-\omega_m} \tag{42}$$

で定義される。x に関する微分演算子

$$\boldsymbol{\Phi}_x = \sum_{n=1}^{2S} f_n \cdot \left(\frac{d}{dx} - S + 1\right)_{n-1} \tag{43}$$

を導入すると(41)は(31)を考慮して

$$\langle S^- S^+ \exp(xS^z)\rangle = \boldsymbol{\Phi}_x \cdot \langle [S^+ \exp(xS^z), S^-]\rangle \tag{44}$$

と表し得る。ここで恒等式

$$[\exp(xS^z), S^-] = (e^{-x}-1) S^- \exp(xS^z), \tag{45}$$

$$S^- S^+ = S(S+1) - S^z - (S^z)^2 \tag{46}$$

の存在に注意すると，(44)は $\Omega(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} &S(S+1)\Omega(x) - \frac{d\Omega}{dx} - \frac{d^2\Omega}{dx^2} \\ &= \boldsymbol{\Phi}_x \cdot \left\{ S(S+1)(e^{-x}-1)\Omega(x) + (e^{-x}+1)\frac{d\Omega}{dx} - (e^{-x}-1)\frac{d^2\Omega}{dx^2} \right\} \end{aligned} \tag{47}$$

と表し得る。これはつぎのような連立の微分方程式に変形できる。すなわち

$$\{(1+\boldsymbol{\Phi}_x) - \boldsymbol{\Phi}_x \cdot e^{-x}\}\Omega(x) = \Omega^*(x) \tag{48a}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} - S(S+1)\right\} \cdot \Omega^*(x) = 0\,. \tag{48b}$$

この微分方程式を境界条件

$$\left\{\prod_{m=-S}^{S} \left(\frac{d}{dx} - m\right)\right\} \cdot \Omega(x) = 0\,, \tag{49a}$$

$$\Omega(0) = 1 \tag{49b}$$

のもとに解くと（付録A参照）

$$\Omega(x) = \sum_{m=0}^{2S} \lambda_m e^{(m-S)x}, \tag{50a}$$

$$\lambda_m = \left\{\prod_{n=1}^{m} \frac{1+\boldsymbol{\Phi}(n-S-1)}{\boldsymbol{\Phi}(n-S-1)}\right\} \cdot \left\{\sum_{m=0}^{2S}\left[\prod_{n=1}^{m} \frac{1+\boldsymbol{\Phi}(n-S-1)}{\boldsymbol{\Phi}(n-S-1)}\right]\right\}^{-1} \tag{50b}$$

を得る。ただし $\boldsymbol{\Phi}(m)$ は次式で定義される m に関する $(2S-1)$ 次の多項式である。

$$\Phi(m)=[\Phi_x\cdot e^{mx}]_{x=0}=\sum_{n=1}^{2S}f_n\cdot(m-S+1)_{n-1}\,. \tag{51}$$

(49a)は(25)と等価な恒等式

$$\prod_{n=-S}^{S}(S^z-m)=0 \tag{52}$$

から導びかれることを補足しておく。

(50)は $\Omega(x)$ の形式解である。というのは，f_n は $\Omega(x)$ のすべてのモーメント $\langle(S^z)^m\rangle(m=1,2,\cdots 2S)$ を含んでいるから，結局 $\Omega(x)$ は未知の $\Omega(x)$ のモーメントを用いて表されていることになるからである。したがって $\Omega(x)$ を実質的に定めるためにはモーメントを定めておかなければならない。これらのモーメントを自己矛盾なく決めるためのつじつまを合わせる方程式は(50)を繰り返し微分することにより得られる。この結果得られる $2S$ 元の連立方程式は一般に超越方程式となるので一般の S に対して解を陽に求めることは困難である。$S=\frac{1}{2}$, 1に対しては解を陽に求めることができるがその結果は別の方法で求めた M. Tanaka and Y. Kondo の結果と一致する。

§5. 相互作用のない系

ハミルトニアン(11)において $J_{i,j}=0$ とすると

$$H=-\omega_0\sum_i S_i^z-D\sum_i(S_i^z)^2 \tag{53}$$

を得る。これは相互作用のない系だから，本質的に一粒子系である。したがって，この系の熱力学的性質は厳密に求まる。$\Omega(x)$ はグリーン関数を用いなくても直接求まるのであるが，前節の結果からも得られることを示そう。

前節で与えられた結果は，f_n を

$$f_n=\oint\frac{d\omega}{2\pi i}\cdot\frac{f(\omega)(2D)^{n-1}}{\prod_{m=1}^{n}(\omega-\omega_m)} \tag{54}$$

と変更すればそのまま使える。まづ

$$\Phi(n-S-1)=f(\omega_{n^*})\qquad n^*=2S-n+1 \tag{55}$$

であることを証明する。$\omega_{m+n}-\omega_n=-2nD$ に注意すると

$$\begin{aligned}f_k&=\sum_{l=1}^{k}\frac{(2D)^{k-1}f(\omega_l)}{(\omega_l-\omega_1)(\omega_l-\omega_2)\cdots(\omega_l-\omega_{l-1})(\omega_l-\omega_{l+1})\cdots(\omega_l-\omega_k)}\\&=\sum_{l=1}^{k}\frac{(-1)^{l-1}f(\omega_l)}{(l-1)!(k-l)!}\end{aligned} \tag{56}$$

したがって，

$$\Phi(n-S-1)=\sum_{k=1}^{2S}f_k(n-S-1-S+1)_{k-1} \quad 1\leqq n\leqq 2S$$

$$=\sum_{k=1}^{2S}f_n(n-2S)_{k-1}$$

$$=\sum_{l=1}^{2S}\left\{\sum_{k=l}^{2S}\frac{(-1)^{l-1}(n-2S)_{k-1}}{(l-1)!(k-l)!}\right\}\cdot f(\omega_l)\,. \tag{57}$$

ここで k, l に関する二重和の順序を変更すると

$$\Phi(n-S-1)=\sum_{l=1}^{2S}\left\{\sum_{k=l}^{2S}\frac{(-1)^{l-1}(n-2S)_{k-1}}{(l-1)!(k-l)!}\right\}f(\omega_l)$$

$$=\sum_{l=1}^{2S}\left\{\frac{(-1)^{l-1}f(\omega_l)}{(l-1)!}\sum_{k=l}^{2S}\frac{(n-2S)_{k-1}}{(k-l)!}\right\} \tag{58}$$

となる。また $(n-2S)_{k-1}=(n-2S)(n-2S+1)\cdots(n-2S+k-2)$ なので $(n-2S+k-2)\geqq 0$ の場合は因子 $(n-2S)$ と因子 $(n-2S+k-2)$ の間に必ず0となる因子を含むので $(n-2S)_{k-1}=0$ となる。したがって，$(n-2S)_{k-1}=(-1)^{k-1}(2S-n)!/(2S-n+1-k)!$ が0でない値をもつのは $n-2S+k-2\leqq -1$ すなわち，$k\leqq 2S-n+1$ の場合だけである。こうして，

$$\sum_{k=l}^{2S}\frac{(n-2S)_{k-1}}{(k-l)!}=\sum_{k=l}^{2S}\frac{(-1)^{k-1}(2S-n)!}{k=l(k-l)!(2S-n+1-k)!}$$

$$=\sum_{k=l}^{2S-n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-l)!(2S-n+1-k)!}\cdot(2S-n)!$$

$$=\sum_{m=0}^{n^*-l}\frac{(-1)^{m+l-1}}{m!(n^*-l-m)!}\cdot(2S-n)!$$

$$=\frac{(-1)^{l-1}(2S-n)!}{(n^*-l)!}\delta_{l,n^*} \tag{59}$$

が成立する。これを(58)に代入すると(55)が得られる。

(55)より

$$\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}=\exp\{\beta\omega_{2S-n+1}\} \tag{60}$$

となるので，これを(51)に代入すると最終的に

$$\Omega(x)=\frac{\sum_{m=-S}^{S}\exp\{\beta(\omega_0 m+Dm^2)+mx\}}{\sum_{m=-S}^{S}\exp\{\beta(\omega_0 m+Dm^2)\}} \tag{61}$$

を得る。勿論，(61)は直接に計算した結果に一致している。

§6. Curie-Weiss 模型

すべてのスピン間に相互作用が働き，その大きさがすべて等しいという非現実的な模型はCurie-Weiss 模型と呼ばれていてハミルトニアンが

$$H=-\frac{2J}{N}\sum_{1\leqq i<j\leqq N}S_i^zS_j^z-\omega_0\sum_i S_i^z,\quad S=\frac{1}{2} \tag{62}$$

で与えられる Ising スピン系である。相互作用は J/N で与えられるので，粒子の総数 N に反比例する。$N\to\infty$ のとき，相互作用の大きさは 0 となるがそれでもこの系は相転移を起し，その結果分子場近似が厳密に成立する系となる。今

$$M^z=\sum_{i=1}^{N}S_i^z,\ M^\pm=\sum_{i=1}^{N}S_i^\pm \tag{63}$$

で与えられる演算子 M^z, $M^\pm$ を導入するならばハミルトニアン(62)は

$$H=-\frac{2J}{N}(M^z)^2-\omega_0M^z+\frac{J}{4} \tag{64}$$

と表わされる。M^z, $M^\pm$ の間に存在する交換関係はS_i^z, $S_i^\pm$ のそれから

$$[M^+,\ M^-]=2M^z,\ [M^z,\ M^\pm]=\pm M^\pm \tag{65}$$

となることが容易に導びかれる。これは S_i^z, $S_i^\pm$ に対する交換関係と全く同じである。また

$$\prod_{m=-N/2}^{N/2}(M^z-m)=0 \tag{66}$$

が成立することも容易に確められる。(65)，(66) よりベクトル $\boldsymbol{M}(M^x,\ M^y,\ M^z)$ は大きさ $S=N/2$ なるスピンと見なすことができる。したがって，(64)は前節の一粒子系のハミルトニアン(53)と等価である。ゆえに

$$\langle M^-M^+\exp(xM^z)\rangle=\Phi_x\cdot\langle[M^+\exp(xM^z),\ M^-]\rangle \tag{67}$$

が成立する。ただし微分演算子 Φ_x は，$S=N/2$, $D=2J/N$ とするならば前節のそれと同じである。ここで，熱平均のもとで使う限り正しい関係式

$$M^-M^+=S-M^z \tag{68}$$

の存在に注意すると（(46)と異なることに注意）モーメント母関数

$$\Omega(x)=\langle\exp(xM^z)\rangle \tag{69}$$

に関する方程式は

$$\left(S-\frac{d}{dx}\right)\cdot\Omega(x)=\Phi_x\cdot\left\{(e^{-x}-1)S\Omega(x)+(e^{-x}+1)\frac{d\Omega}{dx}\right\} \tag{70}$$

で与えられる $2S$ 階の微分方程式となる。この微分方程式の解は条件(66)に注意すると

$$\Omega(x)=\frac{\sum_{m=0}^{2S}{}_{2S}C_m\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}e^{(m-S)x}}{\sum_{m=0}^{2S}{}_{2S}C_m\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}} \tag{71}$$

となる。(付録B参照) ここで $\Phi(n-S-1)=f(\omega_{2S-n+1})$ に注意すると

$$\Omega(x)=\frac{\sum_{m=-S}^{S}{}_{2S}C_{S+m}\exp\{\beta(\omega_0 m+Dm^2)+mx\}}{\sum_{m=-S}^{S}{}_{2S}C_{S+m}\exp\{\beta(\omega_0 m+Dm^2)\}} \tag{72}$$

を得る。

<u>$N\to\infty$ における $\Omega(x)$ の漸近形</u>

Kac に従い次の恒等式

$$\exp\{\beta D(m-S)^2\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\,\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}+\sqrt{2\beta D}(m-S)\xi\right) \tag{73}$$

を用いると(71)の分子は

$$2^N\sqrt{\frac{N}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\exp(-\eta^2/2)\cosh\left(\frac{\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\eta+x}{2}\right)\right\}^N d\eta \tag{72}$$

と変形できる。$N\to\infty$ のときの積分の評価を鞍点法によって行うと

$$2^N[\eta_0^2+1-J\beta/2]^{-1/2}\cdot\left[\exp(-\eta_0^2/2)\cosh\left(\frac{\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\eta_0+x}{2}\right)\right]^N \tag{73}$$

となる。同様にして(71)の分母についても漸近評価できる。その結果，$\Omega(x)$ の漸近形として

$$\Omega(x)\sim\sqrt{\frac{\xi_0^2+1-J\beta/2}{\eta_0^2+1-J\beta/2}}\left(\frac{\exp(-\eta_0^2/2)\cosh\left(\frac{\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\eta_0+x}{2}\right)}{\exp(-\xi_0^2/2)\cosh\left(\frac{\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\xi_0}{2}\right)}\right)^N \tag{74}$$

を得る。ただし

$$\eta_0=\sqrt{J\beta/2}\tanh\{(\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\eta_0+x)/2\} \tag{75}$$

$$\xi_0=\sqrt{J\beta/2}\tanh\{(\beta\omega_0+\sqrt{2J\beta}\,\xi_0)/2\} \tag{76}$$

である。系の秩序変数 $\langle M^z\rangle$ と η_0 との関係は(74)より

$$\langle M^z\rangle=\left(\frac{d\Omega(x)}{dx}\right)_{x=0}=\frac{\eta_0(0)}{\sqrt{2J\beta}}\cdot N \tag{77}$$

で与えられることがわかる。$\eta_0(0)$ は $x=0$ に対する η_0 の値という意味である。(75)において，$x=0$ とするとこれは分子場近似によって得られる式と全く同じである。したがって，臨界点 T_C は $T_C=2J/k_B$ となる。

§7. Ising 模型

Ising 模型に母関数の方法を応用してみる。ハミルトニアンはよく知られているように

$$H=-\sum_{i,j} J_{i,j}S_i^z S_j^z-\omega_0\sum_i S_i^z,\quad S_i^z=\pm\frac{1}{2} \tag{78}$$

で与えられる。今 i 番目の格子点と隣接している格子点のスピン演算子の和を M_i とすれば

$$M_i=\sum_{d} S_{i+d}^z \tag{79}$$

である。このとき，

$$\begin{aligned}(\omega-\omega_0)&\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z+yM_i\}\ ;\ S_i^-\rangle\rangle_\omega\\ &=\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z+yM_i\},\ S_i^-]\rangle+2J\langle\langle S_i^+M_i\exp\{xS_i^z+yM_i\}\ ;\ S_i^-\rangle\rangle_\omega\end{aligned} \tag{80}$$

が成り立つ。$G(x,y;\omega)$, $I(x,y)$ を

$$G(x,y;\omega)=\langle\langle S_i^+\exp\{xS_i^z+yM_i\}\ ;\ S_i^-\rangle\rangle_\omega, \tag{81}$$

$$I(x,y)=\langle[S_i^+\exp\{xS_i^z+yM_i\},\ S_i^-]\rangle \tag{82}$$

によって定義するならば(80)は

$$(\omega-\omega_0)G(x,y;\omega)=I(x,y)+2J\frac{\partial}{\partial y}G(x,y;\omega) \tag{83}$$

となる。最隣接格子点の数を z とすれば，M_i は

$$\prod_{m=-S}^{S}(M_i-m)=0,\quad S=z/2 \tag{84}$$

を満たす。これから $G(x,y;\omega)$ に対する境界条件

$$\left\{\prod_{m=-S}^{S}\left(\frac{\partial}{\partial y}-m\right)\right\}\cdot G(x,y;\omega)=0 \tag{85}$$

を得る。この条件下で(83)を解くと

$$G(x,y;\omega)=\sum_{m=1}^{2S+1}\prod_{n=1}^{m}\frac{I^{m-1}(x,y)(2J)^m}{\omega-\omega_0-2J(n-1-S)}, \tag{86}$$

$$I^m(x,y)=\frac{1}{2J}\left(\frac{\partial}{\partial y}-S\right)_m\cdot I(x,y). \tag{87}$$

スペクトル定理を使って

$$\langle S^-S^+\exp\{xS^z+yM\}\rangle=\sum_{k=0}^{2S}f_kI^k(x,y), \tag{88}$$

$$f_k=\oint\frac{d\omega}{2\pi i}\prod_{n=1}^{k+1}\frac{f(\omega)(2J)^{k+1}}{\omega-\omega_0-2J(n-1-S)} \tag{89}$$

を得る。(88)を x 及び y で微分することによって種々の相関関数の間の関係式を得るが，一

次元系の場合を除いては，相関関数の種類に比べて方程式の数が少いのでそれらを解くことはできない。

§8. むすび

前節までに見てきたように，母関数による方法の特徴は次の二点である。(i)一般の S に対するグリーン関数及びモーメント母関数の導出が簡単である。(ii) $\langle\langle S_i^+(S_i^y)^n\exp(xS_i^y)\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega$ の型のグリーン関数を微分形 $(d^n/dx^n)\langle\langle S_i^+\exp(xS_i^y)\,;\,S_j^-\rangle\rangle^\omega$ に変形できる。その結果，$2S$ 元の連立方程式を一つの線型微分方程式に帰着できる。この型のグリーン関数はハミルトニアン $H_{\mathrm{A}}=-D\sum_i(S_i^z)^2$ の存在によって生ずるので一軸的異方性の効果を調べるのに都合がよい。

Ising 模型は母関数の方法が使える良い応用例であったが，問題を完全に解くことはできなかった。

最後に切断(17)について一言述べておく。(11)において $D=0$ とした等方的ハイゼンベルク模型における Callen の方法[10]では

$$\langle\langle S_i^zS_{i+d}^z\,;\,\exp(xS_j^z)S_j^-\rangle\rangle_\omega\longrightarrow\langle S^z\rangle\langle\langle S_i^+\,;\,\exp(xS_j^z)S_j^-\rangle\rangle_\omega \tag{90a}$$

または

$$\langle\langle S_{i+d}^+S_i^z\,;\,\exp(xS_i^z)S_j^-\rangle\rangle_\omega\longrightarrow\langle S^z\rangle\langle\langle S_{i+d}^+\,;\,\exp(xS_j^z)S_j^-\rangle\rangle_\omega \tag{90b}$$

を必要とする。その結果導びかれるモーメント母関数は

$$\Omega(x)=\frac{\Phi^{2S+1}e^{-Sx}-(1+\Phi)^{2S+1}e^{(S+1)x}}{[\Phi^{2S+1}-(1+\Phi)^{2S+1}][(1+\Phi)e^x-\Phi]} \tag{91}$$

である[10]。ところが，我々のグリーン関数 $\langle\langle S_i^+\exp(xS_i^z)\,;\,S_j^-\rangle\rangle_\omega$ から切断(17)を用いた結果も(91)である。このことは切断(17)による近似とチャブリコフ近似(90)の同等性を意味している。切断(17)は，同じ格子点の演算子の積は全体として一つの演算子とみなしその間の切断はしないが，異なる格子点間の相関は無視するという方針で得られたものである。したがって R. A. Tahir-Kheli and H. B. Callen[11] が縦成分のスピン相関 $\langle S_i^z(t)S_j^z(0)\rangle$ を求めるために行った切断

$$\begin{aligned}&\langle\langle S_f^z(t)S_g^+\,;\,S_m^z(0)\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)\rangle\rangle\\&\quad\longrightarrow\langle S^z\rangle\langle\langle S_g^+(t)\,;\,S_m^z(0)\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)\rangle\rangle\end{aligned} \tag{92}$$

を $m\neq p$ のときに適用するのは適当ではない。つまり $m\neq p$ のときには，$S_m^z(0)$ と $\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)$ を分離する切断をも考慮しなければならない。我々の切断(17)の精神に従うならば

$$\begin{aligned}&\langle\langle S_f^z(t)S_g^+(t)\,;\,\hat{S}_m^z(0)\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)\rangle\rangle\qquad \hat{S}_m^z\equiv S_m^z-\langle S^z\rangle\\&\quad\longrightarrow\langle S^z\rangle\langle\langle\hat{S}_g^+(t)\,;\,S_m^z(0)\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)\rangle\rangle\end{aligned}$$

$$+\langle\hat{S}_f^z(t)\hat{S}_m^z(0)\rangle\langle\langle S_g^+(t)\,;\exp[xS_p^z(0)]S_p^-(0)\rangle\rangle \tag{93}$$

としなければならないからである。にもかかわらず(92)を使うとチャブリコフ近似による結果[12),13)]と異るのは当然である。この改良は T. Ishikawa and T. Oguchi[14)] によってなされたが，彼らは本質的には(93)を使った。(93)をそのまま使用すると方程式は閉じないので更に近似する必要があった。しかし，我々の方法では縦成分のスピン相関関数を求めるために母関数 $\langle\langle S_i^+\exp[xS_i^z]S_i^z\,;S_j^-\rangle\rangle_\omega$ を用いればよいのだが，そのとき切断(17)を用いるだけで他に一切近似をしないで簡単に求まる。異方的強磁性体におけるスピン相関 $\langle S_i^z(t)S_j^z(0)\rangle$ は現在計算中である。

付録A　微分方程式(48)の解き方

微分方程式(48b)が解

$$\Omega^*(x)=Ae^{Sx}+Be^{-(S+1)x} \tag{A1}$$

をもつことは明らかである。A，B は境界条件(49)から決定されるべき定数である。したがって(49a)は $2S$ 階の同次でない微分方程式

$$\{(1+\Phi_x)-\Phi_x\cdot e^{-x}\}\,\Omega(x)=Ae^{Sx}+Be^{-(S+1)x} \tag{A2}$$

となる。(A2)の一般解は，(A2)の特殊解と同次方程式

$$\{(1+\Phi_x)-\Phi_x{}^{-x}\}\,\Omega(x)=0 \tag{A3}$$

の一般解との和で与えられる。先づ，特殊解を求めるために，解を

$$\Omega(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m e^{(\alpha+m)x}\qquad(C_0\neq 0)$$

と仮定して(A2)に代入すると

$$-C_0\Phi(\alpha-1)e^{(\alpha-1)x}+\sum_{m=0}^{\infty}\{(1+\Phi(\alpha+m))C_m-\Phi(\alpha+m)C_{m+1}\}e^{(\alpha+m)x}$$
$$=Ae^{Sx}+Be^{-(S+1)x} \tag{A4}$$

を得る。これが x について恒等的に成立するためには

$$\alpha=-S, \tag{A5}$$

$$C_0=-B/\Phi(-S-1), \tag{A6}$$

$$\{1+\Phi(-S+m)\}C_m-\Phi(-S+m)C_{m+1}=\begin{cases}O & m\neq 2S\\ A & m=2S\end{cases} \tag{A7}$$

が成立しなければならない。漸化式(A7)を解いて

$$C_m=\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}C_0,\quad 1\leqq m\leqq 2S \tag{A8}$$

$$C_{2S+1+m}=\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n+S)}{\Phi(n+S)}\right\}C_{2S+1},\quad m\geqq 1 \tag{A9}$$

を得る。ただし C_{2S+1} は次式で与えられる。

$$C_{2S+1}=\left\{\prod_{n=1}^{2S+1}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}C_0-\frac{A}{\Phi(s)}, \tag{A10}$$

したがって，特殊解は

$$\Omega(x)=C_0\sum_{m=0}^{2S}\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{(n-S-1)}\right\}e^{(-S+m)x}$$

$$+C_{2S+1}\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n+S)}{\Phi(n+S)}\right\}e^{(S+1+m)x} \tag{A11}$$

となる。C_0, C_{2S+1} は境界条件(49)より定まる。その結果

$$\Omega(x)=\sum_{m=0}^{2S}\lambda_m e^{(m-S)x}, \tag{A12}$$

$$\lambda_m=\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}\cdot\left\{\sum_{m=0}^{2S}\left[\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right]\right\}^{-1} \tag{A13}$$

を得る。つぎに（A3）の一般解を求めるために，特殊解の場合と同様に $\Omega(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m e^{(\alpha+m)x}$ （$C_0\neq 0$）と仮定するならば

$$\Phi(\alpha-1)=0, \tag{A14}$$

$$\{1+\Phi(\alpha+m)\}C_m-\Phi(\alpha+m)C_{m+1}=0 \tag{A15}$$

を得る。$\Phi(x)$は x の（$2S-1$）次の多項式だから $\Phi(x)=0$ の根は（$2S-1$）個存在しそれらを $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2S-1}$ とするならば（A14）を満たす α は

$$\alpha=1+\alpha_1,\ 1+\alpha_2, \cdots,\ 1+\alpha_{2S-1} \tag{A16}$$

となる。$\alpha=1+\alpha_k(k=1, 2, \cdots, 2S-1)$ に対する解を $Q_k(x)$ とするならば

$$Q_k(x)=e^{(1+\alpha_k)x}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n+\alpha_k)}{\Phi(n+\alpha_k)}\right\}e^{mx} \tag{A17}$$

となる。(A3) の一般解は $Q_k(x)(k=1, 2, \cdots, 2S-1)$ の一次結合で与えられるが，どの $Q_k(x)$ も境界条件（49a）を満たし得ないので結局一般解は存在しないことになる。こうして特殊解（A12）が（A2）の解となる。

§B　微分方程式(70)の解き方

付録Aと同様に解を $\Omega(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C_m e^{(m+\alpha)x}(C_0\neq 0)$ と仮定して，これを(70)に代入すると

$$(S+\alpha)\Phi(\alpha-1)C_0=0, \tag{B1}$$

$$\{S-(m+\alpha)\}\{1+\Phi(m+\alpha)\}C_m-(S+1+\alpha+m)\Phi(m+\alpha)C_{m+1}=0 \tag{B2}$$

を得る。(B1) より α は定まり

$$\alpha=-S,\ 1+\alpha_1,\ 1+\alpha_2,\cdots,\ 1+\alpha_{2S-1} \tag{B3}$$

となる。$\alpha_k(k=1, 2,\cdots, 2S-1)$は $\Phi(x)=0$ の k 番目の根である。(B3) で与えられる各々の α に対して (B2) より C_m がそれぞれ定まる。それらに対する解を順に $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $\cdots$, $Q_{2S-1}(x)$ とするならば

$$Q_0(x)=\sum_{m=0}^{2S} {}_{2S}C_m\left\{\prod_{n=1}^{m}\frac{1+\Phi(n-S-1)}{\Phi(n-S-1)}\right\}e^{(m-S)x}, \tag{B4}$$

$$Q_k(x)=\sum_{m=0}^{\infty}C(m\ ;\ k)e^{(\alpha_k+1+m)x},\ k=1, 2,\cdots, 2S-1 \tag{B5}$$

である。ただし (B5) の係 $C(m\ ;\ k)$ は

$$C(m\ ;\ k)=\prod_{n=1}^{m}\frac{(S-\alpha_k-n)\{1+\Phi(n+\alpha_k)\}}{(S+1+\alpha_k+n)\Phi(n+\alpha_k)} \tag{B6}$$

で与えられる。境界条件(66)は，$\Omega(x)$ に対する境界条件

$$\left\{\prod_{m=-S}^{S}\left(\frac{d}{dx}-m\right)\right\}\cdot\Omega(x)=0 \tag{B7}$$

を与えるが (B7) を満たす解は (B4) だけである。したがって(70)を満たす一般解は $\Omega(x)=AQ_0(x)$ となり未定係数 A は $\Omega(0)=1$ より求まる。その結果(71)を得る。

文　　献

1) N. N. Bogolyubov and S. V. Tyablikov: Retarded and Advanced Green Function in Statistical Physics, Soviet Phys. Doklady **4** (1959) 604.

2) M. McMillan and W. Opechowski: On the Temperature Dependence of the Shape of Paramagnetic Resonance Lines, Can. J. Phys. **38** (1960) 1168.
I. Svare and G. Seidel: Temperature Dependence of Paramagnetic Resonance Lines, Phys. Rev. **134** (1964) A172.

3) M. Tanaka and Y. Kondo: EPR Line Shifts Due to the Exchange Coupling at Low Temperatures, J. Phys. Soc. Japan **38** (1975) 1538.
M. Tanaka and Y. Kondo: Electron-Paramagnetic-Resonance Spetrum at Low Temperatures, J. Phys. Japan **40** (1976).

4) M. Tanaka, Y. Kondo and H. Kitaguchi: On the Critical Temperature of a Two-Dimensional Anisotropic Ferromagnet, J. Phys. Soc. Japan **34** (1973) 267.

5) T. Murao and T. Matsubara: A Green Function Approach to a Uniaxial Ferromagnet, J. Phys. Soc. Japan **25** (1968) 352.

6) J. F. Devlin: Effect of Crystal-Field Anisotropy on Magnetically Ordered Systems, Phys. Rev. B**4** (1971) 136.

7) S. B. Haley and P. Erdos: Standard-Basis Operator Method in the Green Function Technique of Many-Body Systems with an Application to Ferromagnetism, Phys. Rev. B**5** (1972) 1106.

8) M. Tanaka and Y. Kondo: A Green-Function Theory of an Anisotropic Ferromagnet, Prog.

Theor. Phys. **48** (1972) 1815.

9) Y. Kondo and M. Tanaka: On a Generating Function of Anisotropy Green Functions, Prog. Theor. Phys. **50** (1973) 708.

10) H.B. Callen: Green Function Theory of Ferromagnetism, Phys. Rev. **130** (1963) 890.

11) R. A. Tahir-Kheli and H. B. Callen: Longitudinal Correlation Function of the Heisenberg Ferromagnet, Phys. Rev. **135** (1964) A679.

12) K. Kawasaki and H. Mori: On the Green's Functions of the Heisenberg Spin Systems, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 690.

13) S.H. Liu: Correlation Functions for a Heisenberg Ferromagnet, Phys. Rev. **139** (1965) A1552.

14) T. Ishikawa and T. Oguchi: Spin Pair Correlation for an Isotropic Heisenberg Ferromagnet, Prog. Theor. Phys. **50** (1973) 807.