An Extension of the weighted uniform distribution mod 1

by
川崎医科大学　数学教室
後　藤　和　雄
(昭和55年8月27日受理)

Kazuo GOTO
Department of Mathematics, Kawasaki Medical School

Kurashiki 701-01, *Japan*
(*Received on Ang.* 27, 1980)

概　要

一様分布論を取り扱う上でのよく知られている H. Weyl〔1〕のクラシカルな結果を収束の一様性の場合に Hlawka〔2〕や G. M. Petersen〔3〕が，重み付き平均の場合には M. Tsuji〔4〕が最初に拡張した。この論文の目的は，2つの概念を統一し，基本的な結果について述べることである。

Abstract

The well known classical result of H. Weyl〔1〕concerning the theory of unitorm distribution was first generalized by Hlawka〔2〕and G. M. Petersen〔3〕to the case of the uniformly convergence and by M. Tsuji〔4〕to the case of weighted means. It is our aim in this paper to unite two concepts and to give some basic results.

定　義

$0<\lambda_n$ を非増加数列で

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty \qquad \cdots\text{条件 (A)}$$

を満足を満足しているものとし，Jを任意のIの右側開区間とし，$\varphi_J(x)$ をJの特性関数とする。このとき，

数列 (x_n) が (M, λ_n)-weighted well distributed mod 1 ((M, λ_n) -w. d. mod. 1) であるとは，次の関係式を満足しているときに言う：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n\varphi_J(\{x_n\})}{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n}=\mathrm{mes}(J)$$

uniformly in $k=0, 1, 2, \cdots$

定　理　1

数列 (x_n)，$n=1, 2, \cdots,$ が (M, λ_n)-w. d. mod. 1 であるための必要十分条件は，

〔0, 1〕上で定義された任意の Riemann 可積分である関数に対して，次の等式が成立することである。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n}\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n f(\{x_n\})=\int_0^1 f(x)dx \text{ uniformly in } k=0,1,\cdots,$$

但し，$\{x\}$ は x の小数部分を表わす。

定理 2

上記の必要十分条件は次とも同値である。任意の $h\in Z-\{0\}$ に対して

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n}\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n e^{2\pi ihx_n}=0 \text{ uniformly in } k=0,1,2,\cdots,$$

が成立すること。

〔Remark〕

(i)　$k=0$, $\lambda_n\equiv1$ のときは，H. Wyle〔1〕の H. Wyle の基本定理

(ii)　$\lambda_n\equiv1$ のときは，Hlawka〔2〕, G. M. Petersen〔3〕の well-distributed sequences の基本定理

(iii)　$k=0$ のときは，M. Tsuji〔4〕の (M, λ_n)-unitormly distributed pequemes の基本定理

Main Results

数列 (x_n) が，(M, λ_n)-w. d. mod 1 であることと，well-distributed mod 1 であることが同値であるために (λ_n) が満足すべき条件の 1 つは

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n}>\frac{1}{2}$$

である。

この結果を導くためにいくつかの補助定理を用意する。その前に定理 1，2 の証明を行っておく。

〔定理 1 の証明〕

我々はまず必要性を証明しよう。

f が複素数値関数の場合は，実部と虚部に分けて考えればよいから，f は実数値関数としよう。まず，

$$f(x)=\sum_{i=0}^{h-1}d_i\varphi_{(a_i,a_{i+1})}(x)$$

を $\bar{I}=[0,1]$ 上の階段関数とする。このとき，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n}\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n\sum_{i=0}^{h-1}d_i\varphi_{(a_i,a_{i+1})}(\{x_n\})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n}\sum_{i=0}^{h-1}d_i\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n\varphi_{(a_i,a_{i+1})}(\{x_n\})$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}d_i(a_{i+1}-a_i)=\int_0^1 f(x)dx \text{ uniformly in } k$$

故に，f が階段関数のときは成立する。

一般に，f が Riemann 可積分とすると，

$$f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x) \text{ for all } x \in \bar{I}$$
$$\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))dx \leqslant \varepsilon$$

となる f_1, f_2 が存在することを用いて証明される。

十分性は，$\varphi_J(x)$ は，$x \in I$ で Riemann 可積分であることに注意すれば明らか。(q.e.d)

〔定理 2 の証明〕

必要性は，前定理より容易である。

十分性は，$f(x) = \exp(2\pi ihx)$ は Riemann 可積分であることと，周期は 1 であることに注意すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，Weiestrass の近似定理より，適当な三角多項式 $\Psi(x)$ が存在して，

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - \Psi(x)| \leqslant \varepsilon$$

従って，

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right|$$
$$\leqq \left| \int_0^1 (f(x) - \Psi(x))dx \right| + \left| \int_0^1 \Psi(x)dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \Psi(x_n) \right| + \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left(f(x_n) - \Psi(x_n)\right) \right|$$
$$\leqq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \text{ as } N \to \infty \qquad \text{(q.e.d)}$$

さて，我々は，以上までは (M, λ_n)-w. d. mod 1 と同値になる条件について調べたが，これからは，ある種の十分条件を考えて行くことにしよう。

定理 3

(λ_n)，(μ_n) は条件(A)を満足し，

$$\lambda_n = a_n \mu_n, \quad a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \cdots > 0$$

とする。もし，(x_n) が (M, μ_n)-w. d. mod 1 で，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+n} \lambda_\nu \to \infty \text{ as } n \to \infty \text{ uniformly in } k$$

であるならば，

$$(x_n) \text{ は } (M, \lambda_n)\text{-w. d. mod 1}$$

である。

〔証明〕

$$\sigma_n = \sum_{\nu=k+1}^{k+n} \mu_\nu e^{2\pi imx_\nu}$$

とおくと仮定より次の様になる。

$$\sigma_n = o\left(\sum_{\nu=k+1}^{k+n} \mu_\nu\right) \text{ uniformy in } k$$

“o” は，Landau small o notation である。

故に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，$n_0 \leqq n$ である任意の n に対して，

$$|\sigma_n| \leqq \varepsilon \sum_{\nu=k+1}^{k+n} \mu_\nu$$

$$S=\left|\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu e^{2\pi imx\nu}\right|=\left|\sum_{\nu=k+1}^{k+n}a_\nu\mu_\nu e^{2\pi imx\nu}\right|$$

$$=|a_{k+1}\sigma_1+a_{k+2}(\sigma_2-\sigma_1)+\cdots\cdots+a_{k+n}(\sigma_n-\sigma_{n-1})|$$

ここで，Abel 交換を行って，

$|\sigma_n|\leqq\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\mu_\nu$

に注意すると，

$$S\leqq\sum_{\nu=k+1}^{k+n0-1}\mu_\nu a_\nu-a_{n0+k}\sum_{\nu=k+1}^{k+n0-1}\mu_\nu$$

$$+\varepsilon\times\left(\begin{array}{l}(\mu_{k+1}+\cdots\cdots+\mu_{k+n0})(a_{k-n0}-a_{k+n0+1})+\cdots\cdots\\ \qquad+\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\quad\cdots\cdots\cdots\\ \qquad\qquad+(\mu_{k+1}+\cdots\cdots+\mu_{k+n-1})\ (a_{k+n-1}-a_{n+k})\\ \qquad\qquad\quad+(\mu_{k+1}+\cdots\cdots+\mu_{k+n})a_{n+k}\end{array}\right)$$

$$\leqq\sum_{\nu=k+1}^{k+n0-1}\lambda_\nu+\varepsilon(\mu_{k+1}a_{k+1}+\cdots\cdots+\mu_{k+n0-1}a_{k+n0-1})+\varepsilon\sum_{\nu=k+n0}^{k+n}\lambda_\nu$$

$$=\sum_{\nu=k+1}^{k+n0-1}\lambda_\nu+\varepsilon\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu=o\left(\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu\right)$$

, as $n\to\infty$ uniformly in k (q. e. d)

系 4

(λ_n) は条件(A)を満足し，更に，

$\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu\to\infty$, as $n\to\infty$

が，k に関して一様であるとする。このとき (x_n), $n=1,2,\cdots$, が w. d. mod 1 であれば

(x_n), $n=1,2,\cdots$, は，$(M, \lambda n)$-w. d. mod 1

でもある。

〔証明〕

定理において，$\mu_n\equiv1$ とすればよい。 (q. e. d)

補助定理 5

$\lambda_n>0$, $\lambda_n\downarrow$, $\liminf_{n\to\infty}\lambda_{2n}/\lambda_n>\frac{1}{2}$

を満たす数列 $\lambda_n(=\lambda(n))$ は，

$\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda_n\to\infty$, as $N\to\infty$

uniformly in k

〔証明〕

$$1\geq\limsup\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n}\geq\beta=\liminf\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n}>\frac{1}{2}$$

であるから，$1>{}^\forall\varepsilon>0$ に対して，Kano〔5〕の Lemma 1 の結果より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\lambda(2^n)=0 \qquad (1)$$

をうる。さて，任意の $N \geqq N_0(\varepsilon)$ に対して，

$$\beta-\varepsilon<\frac{\lambda(2^N)}{\lambda(2^{N-1})}\leq 1$$

i. e.

$$\log(\beta-\varepsilon)<\log\lambda(2^N)-\log\lambda(2^{N-1})\leq 0$$

これを，$N=N_0+k+1, \cdots\cdots, N+k$ とおいて加えると，

$$(N-N_0)\log(\beta-\varepsilon)<\log\lambda(2^{N+k})-\log\lambda(2^{N_0+k})\leq 0$$

$$\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{N+k}+\frac{(N-N_0)\log(\beta-\varepsilon)}{N+k}$$

$$<\frac{\log\lambda(2^{N+k})}{N+k}\leqq\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{N+k} \tag{2}$$

ところで，$\log(\beta-\varepsilon)<0$ だから

$$\frac{(N-N_0)\log(\beta-\varepsilon)}{N+k}>\frac{(N-N_0)\log(\beta-\varepsilon)}{N}$$

だから，(1)において，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\lambda(2^{N_0+k})=0$$

であるから，

$\exists k=k_0(\varepsilon)$; $\forall k>k_0(\varepsilon)$ に対して，

$$\left|\frac{1}{k}\log\lambda(2^{N_0+k})\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{k}\log\lambda(2^{N_0+k})\right|\leq M=\max_{1\leq k\leq k_0(\varepsilon)}\left|\frac{1}{k}\log\lambda(2^{N_0+k})\right|$$

故に，もし $k>k_0(\varepsilon)$ ならば，

$$\left|\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{N+k}\right|=\left|\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{k}\right|\frac{k}{N+k}\leqq\varepsilon$$

もし，$k\leqq k_0(\varepsilon)$ ならば，

$$\left|\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{N+k}\right|=\left|\frac{\log\lambda(2^{N_0+k})}{k}\right|\frac{k}{N+k}$$

$$\leqq M\frac{k_0(\varepsilon)}{N}\to 0, \text{ uniformly in } k$$

このことと，(2)によって，

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log\lambda(2^{N+k})}{N+k}=0, \text{ uniformly in } k$$

を得る。

任意に，$k\in\mathbf{N}$ を固定する。このとき，$\forall m\in\mathbf{N}$ に対して，

$$\exists n=n(m,\ k)\in\mathbf{Z}$$

$$2^{k+n-1}\leq m+k<2^{n+k},\ k<2^k$$

であるから，

$$2^{k+n-2}<m<2^{n+k}$$

を得る。従って，

$$\frac{\log\lambda(2^{n+k})}{(n+k)\log 2}\leqq\frac{\log\lambda(m+k)}{\log m}\leqq\frac{\log\lambda(2^{n-1+k})}{(n+k-2)\log 2}$$

$m\to\infty$とすると，(2)より

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log\ \lambda(m+k)}{\log\ m}=0,\ \text{uniformly in } k$$

すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\ n\lambda(n+k)}{\log\ n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}n\lambda(n+k)=\infty,\ \text{uniformly in } k$$

従って，ある定数Cが存在して，

$$n\lambda(n+k)\geqq C>0,\ n\geqq 1$$

$$=\alpha^{-1}\left\{\sum_{\nu=k+1}^{k+N}(\lambda_\nu-\lambda_{2\nu-1})+\sum_{\nu=k+1+N}^{2(k+N)}\lambda_\nu-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu\right\}$$

$$<\alpha^{-1}\left\{\sum_{\nu=k+1}^{k+N}(\lambda_\nu-\alpha\lambda_\nu)+\sum_{\nu=k+1+N}^{2(k+N)}\lambda_\nu-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu\right\}$$

故に，

$$\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu<\frac{1}{\alpha}\left\{\sum_{\nu=k+N+1}^{k+2N}\lambda_\nu+\sum_{\nu=k+2N+1}^{2(k+N)}\lambda_\nu-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu\right\}$$

$$<\alpha\left\{\sum_{\nu=k+N+1}^{k+2N}\lambda_\nu+\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu\right\}$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu<\frac{1}{2\alpha-1}\sum_{\nu=k+N+1}^{k+2N}\lambda_\nu<\frac{1}{2\alpha-1}N\lambda_{k+N}$$

もし，$k<n_0$ のときは，Kano〔5〕Lemma 1 の結果を用いると，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu<\sum_{\nu=1}^{n_0+N}\lambda_\nu=O((n_0+N)\lambda_{n_0+N})$$

従って，

$$\frac{\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu}{N\lambda_{k+N}}=\frac{\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu}{(n_0+N)\lambda_{n_0+N}}\times\frac{(n_0+N)\lambda_{n_0+N}}{N\lambda_{k+N}}<\frac{\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu}{(n_0+N)\lambda_{n_0+N}}\times\frac{n_0+N}{N}=O(1)$$

, uniformly in k

$$\sum_{n=k+1}^{k+N}\lambda(n)=\sum_{n=1}^{N}\lambda(n+k)\geqq\sum_{n=1}^{N}\frac{C}{n}\to\infty$$

(q. e. d)

補助定理 6

(λ_n) は，補助定理 5 の条件を満足しているものとすると，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu=O(N\lambda_{k+N}),\ \text{as } N\to\infty$$

, uniformly in k

但し，“O” は，Landau Large O notation である。

〔証明〕

我々の仮定によりある定数 α が存在して，

$$\frac{1}{2}<\alpha\leq 1\ ;\ \lambda_{2n}>\alpha\lambda_n \text{ for } {}^\forall n\geqq{}^\exists n_0$$

もし，$k\geqq n_0$ のとき，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu<\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_{2\nu}=\alpha^{-1}\left(\sum_{\nu=k+1}^{2(k+N)}\lambda_\nu-\sum_{\nu=1+k}^{k+N}\lambda_{2\nu-1}-\sum_{\nu=k+1}^{2k}\lambda_\nu\right)$$

定理 7

数列 (λ_n)，(μ_n) は条件(A)を満足しているものとし，

$$\lambda_n=a_n\mu_n,\ a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n>0$$

という関係を満足し，更に

$$0<\lambda_n\downarrow,\ \liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_{2n}}{\lambda_n}>\frac{1}{2}$$

とする。このとき，

数列 (x_n) が，$(M,\ \mu_n)$-w. d. mod 1

であれば，

数列 (x_n) は，$(M,\ \lambda_n)$-w. d. mod 1

でもある。

〔証明〕

$\sigma_n=\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\mu_\nu e^{2\pi imx\nu}$ for ${}^\forall m\in Z-\{0\}$ とおく仮定より任意の $\varepsilon>0$ に対して，$n_0=n_0(\varepsilon)$ が存在して，任意の $n\geqq n_0$ に対して，

$$|\sigma_n|\leqq\varepsilon\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\mu_\nu$$

$\lambda_n=a_n\mu_n$ なる関係と Abel 変換を用い

$$|\sigma_n|\leqq\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\mu_\nu\leqq\mu_{k+1}n\leqq\mu_1 n$$

に注意すると次の不等式が得られる。

$$\left|\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu e^{2\pi imx\nu}\right|$$

$$\leqq\mu_1\{(a_{k+1}-a_{k+2})+\cdots\cdots+(n_0-1)(a_{k+n0-1}-a_{n0+k})\}$$

$$+\varepsilon\left(\begin{array}{l}(\mu_{k+1}a_{k+n0}+\cdots\cdots+\mu_{k+n0-1}a_{k+n0})\\ \quad+(\mu_{k+n0}a_{k+n0}+\cdots\cdots+\mu_{k+n}a_{k+n})\end{array}\right)$$

$$\leqq\mu_1\sum_{\nu=1}^{n0-1}a_\nu+\varepsilon\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu=o\ \left(\sum_{\nu=k+1}^{k+n}\lambda_\nu\right)$$

但し，補助定理 5 を使いている。 (q. e. d)

定理 8

数列 (λ_n) は次の条件；

$$0<\lambda_n\downarrow,\ \liminf_{n\to\infty}\lambda_{2n}/\lambda_n>\frac{1}{2}$$

を満足しているものとする。このとき，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu a_\nu=o\left(\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu\right),\ \text{as } N\to\infty\quad \text{uniformly in } k$$

ならば，

$$\sum_{\nu=k+1}^{k+N}a_\nu=o(N)\ \text{ uniformly in } k$$

但し，$a_\nu=\exp(2\pi ihx_\nu)$，$h\in Z-\{0\}$，$x_\nu\in R$

〔証明〕

$$\Lambda_N^k=\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu,\quad t_N^k=\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\lambda_\nu a_\nu$$

とおく，

$$S_N^k=\sum_{\nu=k+1}^{k+N}a_\nu=\sum_{\nu=k+1}^{k+N}\frac{1}{\lambda_\nu}(\lambda_\nu a_\nu)=\sum_{\nu=k+1}^{k+N-1}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)t_{\nu-k}^k+\frac{t_N^k}{\lambda_{N+k}}$$

仮定より，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N_0=N_0(\varepsilon)\ ;\ \forall N\geqq N_0\quad |t^k{}_N|\leqq\varepsilon\Lambda^k{}_N\ \text{for all } k$$

$$|S^k{}_N|\leqq\left|\sum_{\nu=k+1}^{k+N0-1}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)t_{\nu-k}^k\right|$$

$$+\varepsilon\sum_{\nu=k+N0}^{k+N-1}\left(\frac{-1}{\lambda_\nu}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)\Lambda_{\nu-k}^k+\varepsilon\frac{\Lambda_N^k}{\lambda_{N+k}}$$

$$〔第2項〕\leqq\varepsilon\Lambda_N^k\sum_{\nu=k+N0}^{k+N-1}\left(\frac{-1}{\lambda_\nu}+\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)\leqq\varepsilon\frac{\Lambda^k{}_N}{\lambda_{k+N}}$$

$$〔第3項〕\leqq\varepsilon\frac{\Lambda^k{}_N}{\lambda_{k+N}}$$

補助定理6より

〔第2項〕+〔第3項〕$=\varepsilon O(N)$，uniformly in k

$$〔第1項〕=\sum_{\nu=k+1}^{k+N0-1}\left(\frac{1}{\lambda_\nu}-\frac{1}{\lambda_{\nu+1}}\right)t_{\nu-k}^k=\sum_{\nu=k+1}^{k+N0}a_\nu-\frac{t^k{}_{N0}}{\lambda_{N0+k}}$$

$$\left|\sum_{\nu=k+1}^{k+N0}a_\nu\right|\leqq N_0$$

$$\left|\frac{t_{N0}^k}{\lambda_{N0+k}}\right|=\left|\frac{\sum_{\nu=k+1}^{k+N0}\lambda_\nu a_\nu}{\lambda_{N0+k}}\right|\leqq\frac{\sum_{\nu=k+1}^{k+N0}\lambda_\nu}{\lambda_{N0+k}}\leqq\frac{N_0\lambda_{k+1}}{\lambda_{N0+k}}$$

もし，$k>N_0$ ならば，

$$N_0+k<2k<2(k+1)$$

λ_n の条件より

$$\exists n_1(\varepsilon),\ \forall n\geqq n_1\ ;\ 1\leqq\frac{\lambda_n}{\lambda_{2n}}<\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2}<\alpha<1\right)$$

故に，N_0 として初めから $\max(N_0,\ n_1)$ をとっておくと，

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{N0+k}}=\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{2(k+1)}}\cdot\frac{\lambda_{2(k+1)}}{\lambda_{N0+k}}<\frac{1}{\alpha}$$

もし，$k\leqq N_0$ ならば，

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_{k+N0}} \leqq \frac{\lambda_1}{\lambda_{2N0}} = O(1)$$

以上より，

〔第 1 項〕$=o(N)$，uniformly in k (q. e. d)

さて，我々は，Main Result の証明に移ろう。この証明は，今までの結果を整理すれば得られる。

必要性は，定理 8

十分性は，定理 7 で $\mu_n \equiv 1$ とおけばよい。

〔Remark〕

θ を無理数，$\lambda_n = \frac{1}{n}$とするとき，数列$x_n = n\theta$ は (M, λ_n)-w. d. mod 1 である。

$$I = \frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n}} \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} e^{2\pi i h n \theta}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n}} \sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} (\cos(2\pi h n \theta) + i \sin(2\pi h n \theta))$$

Abel 変換と

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+N} \cos(2\pi h n \theta)\right| \leqq M \text{ 定数}$$

より，

$$\left|\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} \cos(2\pi h n \theta)\right| \leqq \frac{M}{k+1}$$

sin についても同様の式が成立する。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + r + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

但し，r は Euler 定数

従って，

$$\sum_{n=k+1}^{k+N} \frac{1}{n} = \log \frac{k+N}{k} + O\left(\frac{1}{k}\right) = \log\left(1 + \frac{N}{k}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$|I| \leqq \frac{2M}{(k+1)\log\left(1+\frac{N}{k}\right) + O(1)}$$

関数 $k\log\left(1+\frac{N}{k}\right)$は，k に関して単調増加であるから，

$$|I| \leqq \frac{2M}{\log(1+N) + O(1)} \to 0, \text{ as } N \to \infty, \text{ uniformly in } k$$

(q. e. d)

References

1) Weyl, H.; Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. **77**, 313-352 (1916)

2) Hlawka, E.; Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in Kompakten Gruppen, Rend Circ. Mat. Palermo (2) **4**, 33-47 (1955)

3) Petersen, G. M.; Almost convergence and uniformly distributed sequences, Quart. J. Math. (2) **7**, 188-191 (1956)

4) Tsuji, M.; On the uniform distribution of numbers mod. 1, J. Math. Soc. Japan **4**, 313-322 (1952)

5) Kano, T.; Criteria for uniform and weighted uniform distribution mod 1, Comment. Math. Univ. St. Pauli **20**, 83-91 (1971)