

学習発達段階の相異による関数概念の形成過程

—その2 小学校第2学年と第3学年—

川崎医療短期大学 一般教養部

片山 英雄

(昭和58年8月30日受理)

Formative Process of Function Concept in Learning Stage

—The second and the third graders in elementary school—

Hideo KATAYAMA

*Division of General Education,
Kawasaki College of Allied Health Professions
Kurashiki 701-01, Japan
(Received on Aug. 30, 1983)*

概 要

小学校において「関数の考え」を第2学年に導入することは可能であろうか。これを、算数学習能力のほぼ等質な第2・3学年の児童に同一の授業を実施して研究した。その結果、2年でも「つながり(関係)」を「ともなって変わる」考えをもとにして指導すれば理解させることが可能であることが判明した。3年では、一対一対応(きめればきまる)の考えも指導できるので、「関数の考え」の基礎的な事項の指導が可能であることを確認した。

Abstract

Is it possible to introduce "Conception of function" into the second graders of elementary school?

We conducted the same lessons to the second and the third graders who were set homogeneous in learning ability in arithmetic.

As the result we confirmed that even the second graders are able to understand the "relation" if instructed with a notion of "to vary mutually."

For the third graders, as it is possible to teach them one to one correspondence, the fundamental items of "Conception of function" are acceptable for them.

I 目 的

現行の小学校学習指導要領(文部省 1977)では、抽象的な概念である「関数の考え」は、小学校4年で指導することになっている。以前この関数は数学教育現代化の流れによって3年

で指導されていた。しかし、集合などの現代化教材が指導困難であるとされるとともに、現行のようにあらためられた。はたして「関数の考え」は何学年ごろの児童に理解させることが可能なのであろうか。

「関数の考え」の育成は、中学・高校の関数指導と深い関連をもつものとして、児童に最初に身につけさせる内容であり、小学校算数科のあいまいな指導は許されない。また、学校数学において、二つの事柄の関係として物事の本質をとらえることは高次の思考を必要とするが、それだけ効果も高いと思われる。

ところで、これまでの研究は実践的な事例報告が多い傾向がみられる。例えば原田ほか(1967)は、「関数的な見方、考え方を伸ばす素地指導の系統化(低学年)」において、対応・変化・きまりの指導例を報告している。しかし、授業の条件を統制して比較する実験的な指導を実施しての検討は十分なされているとはいえないように思われる。

このような観点にたつて、「学習発達の相異による関数概念の形成過程」を実験的な授業を実施して研究することを続けてきた。前回は3年と4年を比較した研究(坂田・片山 1981)であったが、その結果、3年も基礎的な内容については4年に近い程度の指導が可能であることが確認できた。

今回の研究は、さらに学年を一つ下げ、2年に「関数の考え」を育成する授業を実施し、理解の可能性について3年と比較しながら検討することを目的とする。

Ⅱ 方 法

1. 「関数の考え」の指導目標と指導計画

〔単元目標〕 ともなう変わる二つの数量について、数量間の関係を考え、数量間のきまりを明らかにすること。

〔指導計画〕 各授業時間の指導目標

第1時 ある数量と関係づけられる数量を考えることができる。

第2時 一方の数量をきめれば、他方の数量もひとつにきまることが理解できる。

第3時 一方の数量の変化にともなう、他方の数量も変化することがわかる。

第4時 ともなう変わる数量の間のきまりをみつめることができる。

2. 研究対象児童の算数学習能力の等質性

岡山大学教育学部附属小学校2年・3年の児童について、昭和55年度の各1学級の中から、ほぼ同等の学習能力の児童30名ずつをペアマッチング法で選んで研究対象児童とした。そして、上位・下位各8人ずつを選定した。各群の教師評定(5段階)、知能・算数標準学力検査(SS)の成績を表1に示す。両学年の間に有意差は認められない。

3. 授業の実施と指導効果の判定

授業は概念構成型(坂田・片山・高杉 1981)と名づけた他領域の指導内容と合わせて総合的に指導を進める中で関数概念を育てるタイプで行った。実施時期は2年;56年3月,3年;

表1 両群の等質性 平均値と(SD)

		教師評定	知能検査	学力検査
上位	2年	4.50(0.50)	65.63(5.02)	66.75(5.67)
	3年	4.50(0.50)	67.50(5.90)	64.50(5.05)
下位	2年	1.63(0.48)	54.50(8.15)	51.63(4.95)
	3年	1.75(0.66)	56.25(6.14)	49.88(4.40)
全体	2年	3.06(1.15)	61.76(7.45)	59.03(7.45)
	3年	3.03(1.17)	61.03(7.03)	56.93(6.77)

56年2月であった。指導効果は、Pre test, Post test (22点満点) のほかに、各授業の直前・直後の test, 適用力をみる test (5点満点) などで評価した。

III 結果と考察

指導による効果を、まず、全体的な傾向を、Pre・Post・適用 test の平均値からみる。次に、指導内容ごとの成績を Pre・Post test の項目別平均値から調べる。さらに、各授業別の学習過程を、Pre・Post test に授業の直前・直後 test の成績を加え、正答率の変化から検討する。最後に、関数概念の形成状況をいっそう具体的にとらえるために「つながり(関係)」の考えと、「ともなって変わる」考えの二点について、「そう考えた理由」として説明した内容の分析も加えて考察する。

1. 全体的な傾向

指導による理解の全体的な状況をとらえるために、Pre・Post test と適用 test の成績を表2にまとめた。適用 test の問題は「重さと代金の関係を表・式・グラフに表す」である。

表2 Pre・Post・適用 test 平均値と(SD)

		Pre-test	Post-test	適用 test
上位	2年	5.25(2.39)	11.13(3.55)	3.50(0.71)
	3年	6.88(2.20)	**17.62(1.80)	3.00(0.50)
下位	2年	3.25(1.48)	6.00(2.69)	2.50(0.50)
	3年	3.88(2.89)	***12.75(2.86)	2.25(0.43)
全体	2年	4.13(2.23)	8.63(3.86)	2.90(0.79)
	3年	5.17(2.56)	***14.37(3.11)	2.63(0.66)

有意差の検定はt検定。*5%, **1%, ***0.1%の危険率で有意差。以下同じ。

指導前(Pre test)はいずれも2年は3年より劣っているが有意差ではない。特に、下位児は両学年の差は0.63と小さい。指導前は両学年に著しい差はないと考えてよからう。

指導後(Post test)は、両学年とも指導前に比して高い成績をとっていて、指導効果はそれぞれ認められる。また、2年より3年の優位が明確になりいずれの項目も有意差となっている。しかし、2年上位(11.13)は3年下位(12.75)に相当接近しており、2年でも優秀な子

どもは3年に近い理解ができることを示している。

一方、適用 test については有意差ではないが2年の方が若干すぐれている。これらから、2年でも指導の可能性がないとはいえないことがうかがわれる。

2. 指導内容ごとの理解

Pre・Post test の指導項目別の平均値を求めて表3に示した。

表3 Pre・Post test 項目別平均値

		第1時	第2時	第3時	第4時	表し方	変数	変化
Pre test	2年	1.20	0.53	0.77	0.17	0.0	0.43	1.07
	3年	1.07	*0.87	0.73	0.30	0.03	0.97	1.17
Post test	2年	2.70	0.83	2.40	0.47	0.03	1.27	0.93
	3年	***4.10	***1.50	***4.00	0.70	***1.07	*1.70	1.30

変数；独立変数と従属変数を区別させる問題 変化；やや不規則な変化の理解をみる問題

これによると、指導前 (Pre test) は3年がよい項目が多いが両学年ともあまり差があるとはいえないようである。例外として第2時に有意差がみられることと、第1・3時のみ2年が少しよいが大差とはいえないであろう。

指導後 (Post test) は2年でも Pre test に比して相当高い成績をとっている。特に第1・3時は差が大きく、第1時 (1.5)、第3時 (1.63) と著しく向上していた。第2・4時については向上はしているがあまり大きくなかった。表し方と変化については効果が認められなかった。

これを3年と比べると、いずれの項目でも3年が優れている。第4時と変化以外はすべて有意差となっている。

これらから、指導内容によって、2年でも理解しやすいもの (第1・3時) と、困難なもの (第2・4時) があることがとらえられた。3年は第4時をのぞいて、いずれもかなり高い成績となっている。

3. 各授業別の理解の深まり方

Pre・Post test の各授業別成績に、各授業の直前・直後 test の成績を加えて検討する。テストにより問題数に差があったので、次の式によって平均正答率を算出し、その変化の状況をグラフ化して図1に表した。

$$\text{正答率} = \frac{(\text{のべ正答数})}{(\text{設問数}) \times (\text{人数})} \times 100$$

これによれば、指導により両学年とも全体として向上していく様子が直観的にとらえられる。しかし、詳細に検討すると、3年の優位傾向が明確であるとともに、特に第1～3時では、2年が直後 test で成績がとまるのに対して、3年ではその後も上昇していることである。

それでは、各授業別に検討する。

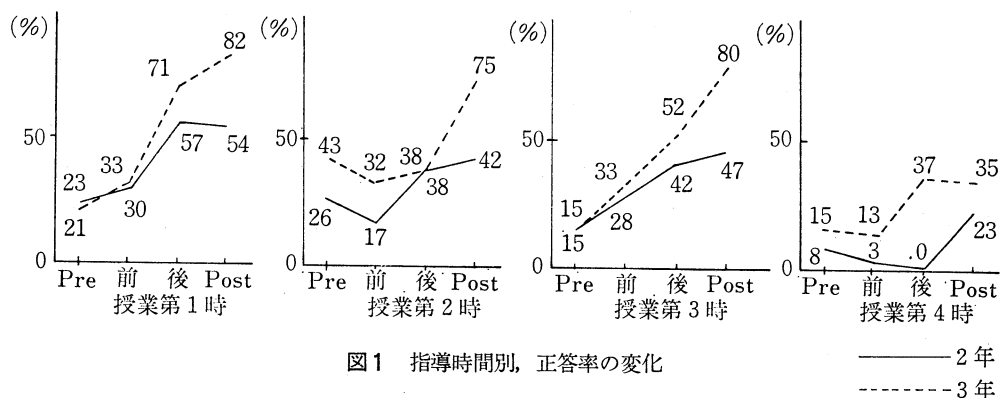


図1 指導時間別、正答率の変化

(1) 授業第1時 「つながり (関係)」の考え

この授業は「二つの数量の間に関係がある」とはどんなことかを理解させるのがねらいである。図1授業第1時によれば、授業の進むにつれて向上する点では両学年とも同じ傾向である。2年でも指導前は3年と同じ程度であったが、直後には相当高くなり57%と4つの授業中では一番よい成績であった。しかし、3年はさらに単元の学習が進むにつれて理解が深まりPost test では82%にもなったのに比して、2年は54%とむしろ低下している。

(2) 授業第2時 「きめればきまる」考え

この授業は「一方の数量をきめれば他方の数量もきまる」という関数の定義 (一意対応) を指導するのがねらいである。テスト問題として Pre test を例にすると、「10g が150円のくすりを 200g 買うと何円か」「市内均一料金の電車で市内の A駅からB駅まで乗ったときの料金はいくらか」といった内容であった。

指導前の Pre test より直前 test が両学年とも低下しているが、これは test 問題の難易度がちがうためと思われる。Pre test は前述したが、直前 test 問題は「3分間9lの割合で水の出る水道で36分間にたまる水の量はいくらになるか」となっていた。特に2年にとっては、乗法の学習はすんでいたとはいえ、問題構造が二段階であり、計算も複雑だったので低下が大きかったと思われる。

指導後については、授業第1時と同じく2年では直後 test (38%) から Post test (42%) の間にあまり向上が認められなかったが、3年では直後 test では2年と差がなかったのに、Post test では75%の正答率という高い成績になって2年と3年の差は著しくひらいている。

(3) 授業第3時 「ともなって変わる」考え

この授業は「一方の数量が変わると他方の数量もともなって変わる」という関数のもう一つ変化という動的な性格を指導することをねらっている。

両学年とも指導前は同じ成績であったが、指導によってだんだん理解が深まっていった。

指導後は2年でも直後 test (42%) までは3年の水準に相当ついて来ているように見えるが、Post test (47%) では大きく差をつけられた。3年は直後 test (52%) から Post test (80%) へ大きく進歩した。

(4) 授業第4時 「きまり」をみつける。

この授業は「二つの数量間の対応のきまりを写像の図からみつけて表す」ことを指導するのがねらいである。

この内容については、両学年とも低い正答率であった。特に2年ではきわめて理解させることが困難であり、一番成績のよい Post test でも23%にとどまっていた。3年でも直後 test (37%)、Post test (35%)と三分の一程度の理解になっているにすぎない。

これは、みつけさせようとした「きまり」が $A+B=13$ とか $2A-1=B$ といった。本来4年を対象として考えた問題であったこと、また、写像の図というなじみの少ない問題場面を提示したものによると考えられる。いずれにしても、この授業第4時は2、3年ともに適切なものとはいえなかったようである。

4. 「つながり(関係)」と「ともなって変わる」考えの形成状況

4つの授業の中で比較的よく理解させることのできた授業第1時「つながり(関係)」の考えと、第3時「ともなって変わる」考えについて指導の前後を比較して、どのように理解が深まってきたかを分析する。

(1) 「つながり(関係)」の考えの理解

これは「二つの数量の間に関係があるかどうか」を判定させ、そう考えた理由を説明させた内容について分析する。テストの問題は2項目あり、(1)は関係のある場合、(2)は関係の無い場合である。具体例を Pre test からとれば、(1)「弟の年齢と3つ年上の兄の年齢」、(2)「身長と国語のテストの点」といったものである。そして、それぞれについて関係の有無の判定をさせ、その理由を説明させた。その正答数と説明内容をまとめたものが表4である。

表4 「関係」の考えの形成状況

test	種別項目		Pre-test		直後 test		Post-test	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
2年	正答数		12	22	27	27	25	25
	説明内容	正答	きめればきまるともなって変わる			3 8	5 5	
		誤答	日常的意味理由が不明確		1	10 10	5 12	
	説明内容	正答	日常的意味理由が不明確		7 4		6	
誤答		日常的意味理由が不明確		1 5	2	1 4		
3年	正答数		13	14	29	30	29	30
	説明内容	正答	きめればきまるともなって変わる			17 15	14 23	
		誤答	日常的意味理由が不明確		5 4	5 4	4 2	
	説明内容	正答	日常的意味理由が不明確		6 4	2 4	2	
誤答		日常的意味理由が不明確		6		1 1		

指導前 (Pre test) では両学年ともほぼ同じ程度で、正答率を算出して検討してみると(以下同じ)関係の有無の判定は2年57%、3年45%であった。その理由の説明も正答はほとんどなく、日常的な意味(どちらも年齢のこと、兄弟だから、身長はからだテストは頭など)とか

理由は不明確だが関係があると思うといった説明にとどまっているものが多く、またこの表には省略したが全く見当ちがいのもの（3つ年上の兄がいない）や、無回答も多くみられた。

指導後（直後・Post test）には2年でも判定87%で関係の有無の判断は十分できるようである。その理由の説明も48%とほぼ半数は説明できるようになった。説明の内容は「ともなって変わる」というものが多く、「きめればきまる」で説明するものがこれにつづいていた。しかし、日常的な意味の説明や無回答も相当残っていた。

3年は、これに比べて判定98%と、ほぼ全員近く正答しており、説明も76%と四分の三まで正しい回答をしている。説明内容は「きめればきまる」が非常に多く、次に「ともなって変わる」がみられ、また、この表では省略しているが、Post test (1)ではきまり（使った数と残った数をたすと15枚）を見つけて関係を説明したものが7人いた。これらから、この指導内容は十分理解させることが可能であると考えられる。

(2) 「ともなって変わる」考えの理解

二つの数量がともなって変わるかどうかを判定させ、その理由を説明させた内容について分析する。テストの問題は2項目あり、(1)は、一方の数量が変わると他方もともなって変わる場合であり、(2)は、一方が変わっても他方がともなって変わらない場合である。具体例を Pre test からとれば、(1)「1本50円のえんぴつを買ったときの買った本数と代金」、(2)「2km まで340円のタクシーに1.5km まで乗ったときの距離と料金」といったものである。そして、それぞれについて「ともなって変わるかどうか」を判定させ、その理由を説明させた。その正答数と説明内容をまとめたものが表5である。

表5 「ともなって変わる」考えの形成状況

test	種別	Pre-test				Post-test			
		(1)		(2)		(1)		(2)	
		判定	理由	判定	理由	判定	理由	判定	理由
2年	正答数	9	3	8	2	22	16	16	11
	誤答の説明内容	変わらないのに変わる きめればきまる		6		2		1	
3年	正答数	9	1	3	1	29	24	25	20
	誤答の説明内容	変わらないのに変わる きめればきまる		3		5		3	

指導前（Pre test）では両学年とも同一の傾向である。判定は2年28%、3年20%であり、理由の説明も正答はきわめて少なく、誤答は「ともなって変わらない」場合でも「ともなって変わる」と考えているものがに目つく程度で、無回答が多かった。

指導後（Post test）では、2年は判定63%となり、理由も、「枚数が変わると代金も変わる」「2枚買ったなら30円になる」というようにともなって変わることを説明できるものが45%とほぼ半数近くになっている。あとは、回答できないようであった。

3年は判定90%、説明73%と高い成績をとり授業1時の場合に近い正答率であった。誤答では、「きめればきまる」で説明する者がやや多いことが特長といえよう。

IV 結 論

2年に「関数の考え」を指導することの可能性について実験的授業の結果からまとめると次のようになる。「つながり（関係）」の理解は可能である。「きめればきまる」は、指導内容を工夫すればできるかもしれないが、このままでは無理であろう。「ともなって変わる」考えは、指導の方法の工夫により可能であると思われる。「きまり」をみつけて表すことは、ここで取り上げた内容と方法では困難である。

これらを通して、「ともなって変わる」考えをもとにして、「二つの数量の間につながり（関係）がある」ということを理解させる関数概念の素地指導を実施することは2年でも可能であるといえよう。

3年の指導の可能性については、授業1～3の「つながり」「きめればきまる」「ともなって変わる」という関数概念の基礎的な事柄は指導可能であることが確認できた。しかし、数量間のきまりをみつけたり、それを表すことについては、ここで取り上げたものは指導困難であるので、指導するとしたら内容・方法とも改善をはからねばならないことが予想される。

以上述べたような点に着目して、2年の素地指導、3年の基礎事項の指導の上に、現行の4年の授業が実施されることが望ましいのではなからうか。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、坂田洵教授（岡山大学教育学部数学科）より多大の指導・助言を受けた。また、Abstract について平井安久助手（岡山大学教育学部数学科）の協力を得た。さらに、高杉早苗教諭、土岐泰通教諭（岡山大学教育学部附属小学校）より授業の実施について援助を受けた。これらの指導・協力を厚く感謝の意を表す。

注

本論文は、日本数学教育学会第63回総会（昭和56年8月）において「関数概念の形成におよぼす発達段階の影響」と題して発表したものに詳細な資料と解説を加えてまとめたものである。

引用文献

1. 文部省；小学校学習指導要領，大蔵省印刷局，1977.
2. 原田昇ほか；関数的な見方，考え方の素地指導（低学年）算数教育，49巻，p. 143，1967.
3. 坂田洵・片山英雄；学習発達段階の相異による関数概念の形成過程，岡山大学教育学部研究集録，57号，p. 23，1981.
4. 坂田洵・片山英雄・高杉早苗；小学校における関数概念の指導——概念追究型と概念構成型——岡山大学教育学部研究集録，56号，p. 81，1981.