学習発達段階の相異による関数概念の形成過程

—その4，改善指導案による授業の効果—

川崎医療短期大学　一般教養部

片　山　英　雄

(昭和59年9月10日受理)

Formative Process of Function Concept in Learning Stage

— No.4 The effect of instruction with an improved teaching plan —

Hideo KATAYAMA

Division of General Education,
Kawasaki College of Allied Health Professions
Kurasiki 701-01, *Japan*

(*Received on Sept.* 10, 1984)

概　　要

関数概念の形成過程を発達の面から検討した。

総合的な指導の中へ関数概念を集中的に指導できるように改善した指導案で，小学校第2・3・4学年の児童に授業を実施した。

その結果，2年の理解は3年より劣るが，基礎的な判断や簡単なきまりをみつけることなどはできるので，関数の素地となる考え方を育てはじめる時期といえよう。

3年は，きまりを表すことをのぞき，どの内容も4年に近い水準で理解していることが明らかになった。こうした授業により関数概念の基本的事項の指導が可能であることが予想される。

4年は，この授業の効果が一番よく認められた。特にきまりを式に表すことに優れており，抽象的な思考力の発達が確認できた。

Abstract

I discussed about the formative process of function concept in the aspect of development.

Classes were given to the 2nd, 3rd and 4th graders in elementary school with the improved teaching plan for an intensive instruction of the function concept into a synthetic method.

The result was that the 2nd graders showed less comprehension than the 3rd graders. Still it is possible for the 2nd graders to have a fundamental judgment and to find simple rules, so it is an appropriate time to grow up a basic ideas for function.

It was shown that comprehension of the 3rd graders was near the level of 4th graders for each content except expressing a rule. These instruction enable us to predict the possibility of instruction of the basic items of the function concept.

The best effect by this instruction was found for the 4th graders. They are excellent especially on describing a rule with an expression, which leads us to recognize the development of the abstract thinking power.

I 目 的

本研究は小学校算数科における「関数概念の形成過程」を発達の面から検討した一連の研究の一つである。これまでの研究で，3年と4年の比較[1]（坂田・片山1981a）では，3年も4年に近い理解に到達できるが，4年は「きまりをみつけて数値をきめる」ことに優れていること，2年と3年の比較[2]（片山1983a）では，2年でも「つながり（関係）」を「ともなって変わる」考えで指導すれば理解させることが可能であり，3年は「きめればきまる」の考えも理解できること，さらに，2年と4年の比較[3]（片山1983b）では，両学年とも「つながり」の理解に「ともなって変わる」考えを根拠にしていること，誤答の中にも共通点がみられることなどが判明してきた。

今回の報告は，2年・3年・4年の3学年を同時に比較すると共に，これまでの授業に加えて，総合的な指導の中に関数概念を集中的に指導できるように改善した指導案[4]（坂田・片山1981b）で授業第5時を実施し，その効果を検討しようとするものである。

II 方 法

研究計画の概要

小学校算数科（第4学年）関数教材「二つのかわる量」を取り上げ，第2・3・4学年の児童に同一の授業を実施し，関数の考えの形成過程におよぼす発達的な面の影響を分析した。

授業は概念構成型の改善型で実施した。この型の授業は，他領域の指導内容とあわせて総合的に指導を進める中で「関数の考え」を育成するために「きめればきまる」「ともなって変わる」などの基本的な考え方を強調して指導するものである。

研究の進め方としては，まず「関数の考え」の指導内容を検討し，5単位時間の指導計画を作成した。そして，その計画に従って，第2・3・4学年のほぼ算数学習能力の同等の児童にそれぞれ授業を実施した。今回は特に，授業第5時の効果に焦点を合わせ，その指導の前後に理解度を評価した。

1．対象者の等質性

岡山大学教育学部附属小学校第2・3・4学年の児童について，昭和55年度の各1学級を選定した。それぞれの学級の中から主として算数科の担当教師による評定を中心に，知能検査，標準学力検査，指導前の理解の実態を調べた事前テストを参考にしながら，ほぼ同等と考えられる者を一対にして30名ずつ選び出した。また，各群の中から上位に属する者8名，下位に属する者8名を選び出し，上位児・下位児とした。その平均値と標準偏差は表1の通りである。

これによれば，各群はほぼ同等の学習能力をもっているといってよいであろう。

表1　対象児童の学習能力　$\overline{X}$（SD）

		教師評定	知能検査	学力検査	事前テスト
上　位	2　年	4.50(0.50)	65.63(5.02)	66.75(5.67)	5.25(2.39)
	3　年	4.50(0.50)	67.50(5.90)	64.50(5.05)	6.88(2.20)
	4　年	4.50(0.50)	65.75(2.86)	66.38(6.74)	*9.50(2.78)
下　位	2　年	1.63(0.48)	54.50(8.15)	51.63(4.95)	3.25(1.48)
	3　年	1.75(0.66)	56.25(6.14)	49.88(4.40)	3.88(2.89)
	4　年	1.75(0.66)	54.62(6.10)	57.25(10.63)	4.38(1.65)
全　体	2　年	3.06(1.15)	61.76(7.45)	59.03(7.45)	4.13(2.23)
	3　年	3.03(1.17)	61.03(7.03)	56.93(6.77)	5.17(2.56)
	4　年	3.03(1.17)	61.73(6.29)	59.63(8.26)	*6.63(3.29)

教師評定；算数科担当教師による5段階評定
知能検査；教研式学年別　知能検査　偏差値
学力検査；教研式学年別　算数科標準学力検査　偏差値
事前テスト；授業前・後テストに準ずる指導内容の理解度テスト　22点満点

2．「関数の考え」の指導と評価の計画

教科・教材　　算数科　小学校第4学年　　数量関係　D(1)「関数教材」二つのかわる量

単元目標　ともなって変わる二つの数量について，数量間の関係を考えたり，数量間のきまりを明らかにしたりすることができる。

「関数の考え」を図1に示すように5つの指導目標に分析してとらえ，それぞれに対応する指導内容（点線の下の部分）を設定し，指導計画を立てた。今回は特に改善された授業として第5時に焦点を当てているために，その前後に授業前テスト，授業後テストを実施してその効果を検討した。

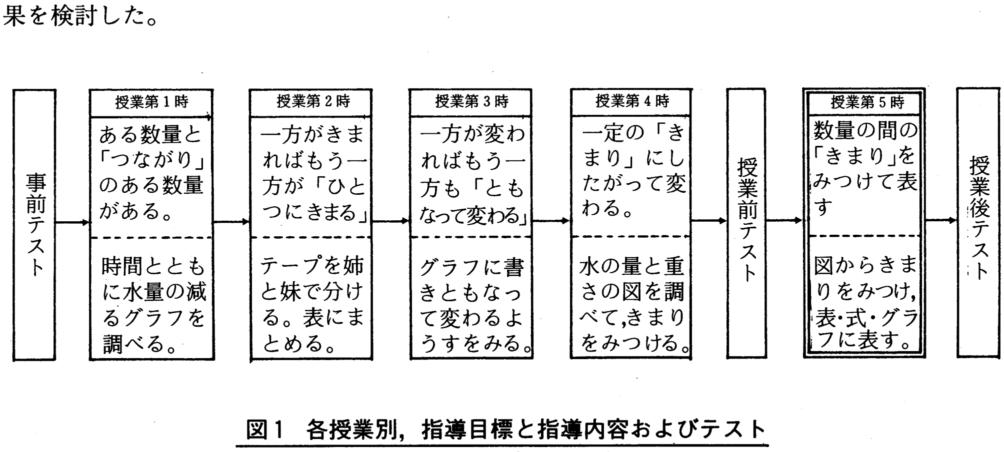


図1　各授業別，指導目標と指導内容およびテスト

3．授業の実施

授業は岡山大学教育学部附属小学校，２年い組，３年は組，４年い組で実施した。各授業の実施時間は40～45分程度でほぼ同じ条件になるように配慮した。各授業の実施担当者は表２の通りで，授業とテストの実施状況は表３の通りである。

表２　授業分担表

	第1時	第2時	第3時	第4時	第5時
2年	片山	土岐	土岐	片山	片山
3年	片山	片山	坂田	片山	片山
4年	片山	坂田	片山	高杉	片山

表３　授業とテスト　スケジュール　月／日（校時）

	事前テスト	授業１時	授業２時	授業３時	授業４時	授業前テスト	授業５時	授業後テスト
２年	2/27(5)	3/4(5)	3/6(5)	3/7(1)	3/11(5)	3/12(5)	3/17(1)	3/17(2)
３年	12/16(3)	1/27(3)	2/3(6)	2/5(2)	2/10(3)	2/12(1)	2/17(3)	2/18(5)
４年	6/24(2)	6/25(1)	6/26(1)	6/30(2)	7/1(2)	7/3(1)	9/8(1)	9/9(2)

２年；昭和56年，　３年；昭和55～56年，　４年；昭和55年

4．授業改善の要点

この授業第５時で実施した授業は，総合的な扱いの中へ関数の考えを適宜集中的に指導できるように計画したものである。問題をといたり，表やグラフに表したり，きまりを式に表したりする中で関数の概念を育てようとする授業（概念構成型）では，豊富な経験を背景にした概念を育てることはできるが，指導目標が複数であるために焦点が定まらず，単に問題をといて式に表したり，グラフに表したりするレベルにとどまり，その底にある「関数の考え」を明確に習得するまでに到らない場合が起こりやすい。

そこで，この改善型の授業では「関数の考え」を表す範例的な日常事象とよく結びつけながら，その指導の中で「きめればきまる」「ともなって変わる」などの基本的な考え方を強調し関数概念をいっそう正確に理解させるようにしたものである。実際の授業は図２に示す指導案の通りである。本時の問題をとく過程で点線の枠の中の既習の指導内容と本時の学習を関連づけながら実線の枠内の基本の考え方を強調して指導した。

5．指導効果の判定

授業第５時は，二つの数量の間のきまりを，表・グラフに表してみつけ式に表すことが目標である。これはまた，この単元のまとめにもなっている。そこで，第１時「つながり」，第２時「きまる」，第３時「変わる」，第４時「きまりをみつける」などの指導内容の理解と，第５時「きまりを表す」の理解を調べるテスト（20点満点）を授業の前後に実施してその効果をみた。テスト問題は授業の前・後とも難易度がほぼ等価になるように，数値の範囲や問題の構造

授業第5時　本時案「きまり」を表す

本時の目標	数量の間の「きまり」を表に整理してみつけ，折れ線グラフに表して変化のようすを調べ，□・△を使って簡潔にまとめて表すことができる。

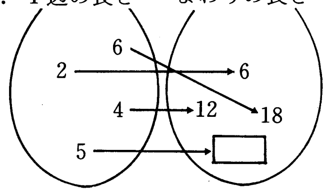
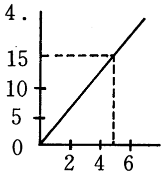
学習活動	指　導　の　要　点
1．問題を知る	1．1辺の長さ　まわりの長さ  ある形の1辺の長さとまわりの長さのかんけいを表している。 □の数はいくらか なぜわかったか どんな「きまり」があるか めあて「きまりをはっきりさせて表す」を板書する
2．とき方を話し合う	2．不規則に示されている数値を整理して「表」にまとめ，「グラフ」に表して「きまり」をみつけ「□・△の式」に表す。
3．「表」に表す	3．まわりの長さのわかっているところを表にする。 1辺の長さ ｜ 2 ｜ 4 ｜ 6 まわりの長さ ｜ 6 ｜ 12 ｜ 18 第2時と関連づける　［1辺の長さをきめればまわりの長さもきまる］ 姉と妹で分ける　→本時と同じ 姉と妹・弟で分ける→ひとつにきまらない。
4．「グラフ」に表す	4． 点と点を結びグラフをかく。 5は4と6の間→連続して変化している。　□の数は15。 第1・3時と関連づける　［1辺の長さがふえるとまわりの長さもふえる］ 本数と代金→　本時と同じ 距離とタクシー→変わらないときもある 時間と水の深さ→変わるが「きまり」がない
5．「きまり」を「式」に表す	5．1辺の長さ□，まわりの長さ△，まわりは1辺の3倍 （1辺の長さ）×3＝（まわりの長さ）…ことばの式 □×3＝△　…簡単に「きまり」を表している。 第4時と関連づける （1 dℓの重さ）×（水の量）＝（水の重さ）…100×□＝△ （姉の分）＋（妹の分）＝5　… □＋△＝5
6．まとめ	6．1辺の長さと まわりの長さ 「つながり」がある。きめればきまる。 ともなって変わる。きまりがある。

図2　改善された指導案

などをそろえた。また,「きまりを表す」テストは,自分の力だけで解決する問題５ａと,表やグラフの枠を与えられ,ことばの式を参照しながらとく問題５ｂと二種類のものを用意した。

問題の例として授業後テストを次に示す。これまでの研究と問題内容は同じだが,分類・整理の方法を一部かえている。

授業後テスト問題

１．二つの数量の間に「つながり」があるか判断させ,その理由をかかせる。

①（正事例）１ダースの鉛筆を兄弟で分ける。兄の数と弟の数。

②（負事例）出席番号と理科のテスト。

１′（とり出し）ジュースを買うとき,ジュースの量とつながりのある数量は何か。

２．（一対一）２dℓが120円のジュースを８dℓ買うと代金はいくらか。

（多対一）郵便小包の市内料金は１㎏まで250円,30ｇから800ｇまでの重さの料金は。

３．二つの数量が「ともなって変わる」か判断させ,その理由をかかせる。

①（正事例）10㎝が50円のテープを買った。長さと代金。

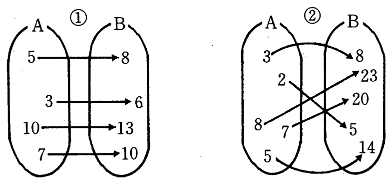
②（負事例）市内バスの均一区間内の料金は大人90円,区間内で乗ったきょりと料金。

３′（とり出し）３さつ600円の雑誌を買う。ともなって変わる数量は（　）と（　）。

４．写像の図で示された問題から「きまり」をみつける。

①（簡単）Ｂ－Ａ＝３

②（複雑）３Ａ－１＝Ｂ



５ａ．７個のみかんをＡとＢで分ける。ＡとＢがもらうみかんの個数のきまりを表すにはどんな方法があるかいろいろ考えてかく。

５ｂ．５ｇが50円のくすりを買った。

①（式）□ｇ買うときの代金を△円として,□と△のかんけいを式に表せ。

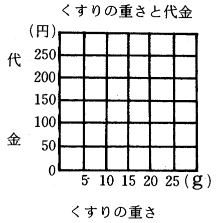
１ｇのねだん×買った重さ＝代金

②（表）下の表にあてはまる数をいれる。

くすりの重さ（ｇ）	0	5	10		20	25
代　　金（円）						

③（グラフ）くすりの重さと代金のかんけいを表すグラフを右の方がん紙にかく。

くすりの重さと代金



Ⅲ　結果と考察

授業の前後テストの成績を表4に，授業内容別に分析したものを表5に，さらに，授業により向上のみられた問題4， 5 a, b の各設問別の正答数を表6に示した。以下，順を追って説明する。

表4　授業5前後テストの比較　$\overline{X}$（SD）

		授業前テスト（a）	授業後テスト（b）	差（b－a）
上　位	2　年	10.88 (2.93)	11.13 (3.14)	0.25
	3　年	** 16.13 (1.36)	** 17.38 (1.41)	1.25
	4　年	16.13 (2.32)	18.25 (1.79)	* 2.12
下　位	2　年	5.88 (2.57)	6.13 (3.02)	0.25
	3　年	** 11.25 (2.44)	* 13.13 (3.22)	1.88
	4　年	12.63 (3.46)	14.25 (2.44)	* 1.62
全　体	2　年	8.2 (3.47)	8.57 (3.42)	0.37
	3　年	** 13.03 (3.01)	** 14.57 (2.86)	** 1.54
	4　年	13.63 (3.01)	15.97 (2.96)	*** 2.34

分散分析　　授業前後、学年間いずれも1％の有意差
t 検 定　　* 5％　　** 1％　　*** 0.1％

1．授業前後テストの全体的傾向　　表4参照

授業第5時によってどれだけ理解が深まったかは，この授業前後テストの成績の差となって表れるわけであるが，表4について分散分析をしてみると，授業の前後，学年間のいずれも高い有意差が認められた。さらにt検定を実施したところ，授業第5時の効果は4年に一番強く認められた。これは学習者全体としてだけでなく，上位児・下位児ともに認められ，この授業により大きく向上したことが明らかになった。3年は全体としては認められるが，上・下位群それぞれではみられなかった。2年では，いずれも若干成績はよいものの有意差とはいえなかった。

学年間の差は，2年と3年の間にのみ有意差となって表れていた。3年と4年の間には差はあるものの有意差ではなかった。

これらから考えると，2年にはこの授業第5時は全体としてはあまり効果が認められなかった。3・4年には効果が認められ，特に3年は4年に近い成績を得ていることから，関数の考えを理解させることの可能性を示しているといえよう。また，4年にはきわめて効果の高い授業であったので，単なる総合的指導よりもこうした改善された指導が有効なことを示しているといえよう。

表5　授業内容別分析　$\overline{X}$

		授業前テスト						授業後テスト					
		1	2	3	4	5 a	5 b	1	2	3	4	5 a	5 b
上 位	2年	3.75	1.	3.13	0.5	0.13	2.38	3.5	1.	3.13	1.13	0.13	2.25
		*	**			**		*		*		***	
	3年	4.63	2.	4.5	0.75	2.13	2.13	4.63	1.5	4.75	1.5	2.63	2.38
													**
	4年	4.38	1.88	4.38	1.	1.88	2.63	4.88	1.88	4.63	1.38	2.5	3.
下 位	2年	2.	0.5	1.5	0.38	0	1.5	1.63	0.25	2.13	0.5	0.13	1.5
		*	*			**		**	*			**	
	3年	3.88	1.25	3.38	0.75	0.75	1.25	3.63	1.13	3.75	1.	1.88	1.75
							*						
	4年	4.13	1.63	2.63	0.63	1.38	2.25	4.38	1.63	3.13	0.63	2.25	2.25
全 体	2年	2.7	0.8	2.37	0.47	0.03	1.83	2.73	0.5	2.6	*0.8	0.1	1.87
		***	***	***		**		***	***	***		***	
	3年	4.1	1.5	4.	0.7	1.07	1.67	4.2	1.27	3.9	*1.1	***1.9	**2.2
							***		***				**
	4年	3.97	1.67	3.6	0.8	1.27	2.33	4.27	1.77	3.97	1.03	***2.23	*2.7

1，3は5点満点、2，4は2点満点、5 a，5 bは3点満点
分散分折の結果有意差のあるもののみ、t検定　* 5％　** 1％　*** 0.1％
数字の前の * 印；授業前後の差　数字の間の * 印；学年間の差

2．授業内容別分析　表5参照

各授業での指導内容別にテスト内容を分けて授業前後，学年間について分散分析を実施した。その結果，有意差のあるものをさらにt検定で検討した。それが表5である。

授業前後に有意差の確認できたのは，問題4，問題5 a，bの，学習者全体の項目である。問題4は2年と3年，問題5 a，bは3年と4年に認められた。上・下位群別には認められなかった。授業第5時の目標は，「きまりをみつけて表す」ことであるので，これに直接関係している問題4「きまりをみつける」，問題5「きまりを表す」が向上したと思われる。

学年間では，学習者全体について2年と3年の間に，問題1，2，3，問題5 aに顕著な差がみられた。この差は上・下位群についても認められる場合もあった。3年と4年の間には，問題2（授業後）と問題5 bに差が認められた。あとの問題には有意差がないばかりか部分的には逆に3年が優れている場合すらあった。これらから全般的にみて，3年と4年の理解水準は接近していると考えられる。関数教材の指導は前学習指導要領では3年で実施するようになっていたが，指導が困難であるとされ現行では4年で取り扱われている。しかし，授業の方法を工夫すれば，3年でも理解させることが可能であることを一層明らかにしたといえよう。それに対して，2年には，この授業第5時は，問題4をのぞいてあまり効果が上がらなかった。その理由として考えられるのは，式やグラフなどの学習をまだ十分経験していないことから，自分で表す方法をみつけることが困難だったためと思われる。

3．問題4，5 a，b 設問別分析　表6参照

授業第5時によって効果の認められた問題4と問題5 a，b について授業後の成績を各設問別に分析する。それぞれの正答数を表6にまとめχ^2検定を行った。

表6　設問別正答数

	4．きまりを見つける 簡単	複雑	5a．自力で表す 表	式	グラフ	5b．ヒントで表す 表	式	グラフ
2年	19	6	3***	0***	0***	27	6**	22
3年	21	12	23	12	22	28	9	29
4年	25	6	24	22	21	30	21	30

χ^2検定；　** 1％　　*** 0.1％

これによると，2年でも問題4の簡単なきまりをみつけることや，問題5 bの枠や目盛のついた用紙を与えられれば，表やグラフに表すことができることを示している。しかし，そういった手掛りを与えられないと，自分ひとりで表を書いたり，グラフに表したりすることはできないので問題5 aの成績はきわめて悪い。このあたりに指導の限界が認められる。

3年は，問題5 a，b の式に表す設問以外はほとんど4年に近い成績をとっている。問題4の複雑なきまりをみつける場合など，むしろ4年より優れている。これまで，全体的傾向，授業内容別分析で明らかになった3年と4年の理解水準の接近のようすが一層明確になったといえよう。

4年は，当然のことではあるがほとんどの場合，一番よい成績である。特に，式に表す問題の成績がよい。手掛りの有無にかかわらず優れている。○・△などを用いた式の学習経験がその原因の一つではあろうが，さらに，抽象的な思考力が発達してきて，一般的に数量の関係を表している式のもつ意味を一層深く理解できているので，この式に表す問題の成績がよくなったものと思われる。

Ⅳ　結　　論

改善指導案による授業第5時の効果を学年別にまとめる。

2年; 授業の効果は，「きまり」をみつける問題にのみわずかに認められた。3年との差も大きい。しかし，手掛りのある場合には表やグラフに表すことができていた。関数の考えの素地となるものがめばえてくる時期といえよう。

3年; 授業の効果は，「きまり」をみつけたり，表したりする問題に認められた。全体的傾向としてはほとんど4年の理解水準に近づいているといえる。関数の考えの基本的な事項の指導が可能であることを示している。

4年; 授業の効果は，学習者全体だけでなく上・下位群にも認められ向上は顕著であった。特に「きまり」を簡潔に式を表す問題の成績が3年より著しく優れていた。抽象的な思考力の発達の一端が確認できた。

謝　　　辞

本研究は，当初よりの共同研究者である坂田泩教授（岡山大学教育学部数学科）に協力・指導を受けながらまとめたものである。また，資料の統計処理については天野牧夫名誉教授（岡山大学）の指導・助言を受けた。さらに，Abstract については平井安久助手（岡山大学教育学部数学科），授業の実施については高杉早苗教諭・土岐泰通教諭（岡山大学教育学部附属小学校）の援助を受けた。これらの指導・協力・援助に厚く感謝の意を表する。

引 用 文 献

1. 坂田泩・片山英雄; 学習発達段階の相異による関数概念の形成過程，岡山大学教育学部 研究集録，57号　P.23，1981a
2. 片山英雄; 学習発達段階の相異による関数概念の形成過程 —その2，小学校第2学年と第3学年— 川崎医学会誌　一般教養篇　第9号　p.1，1983a
3. 片山英雄; 学習発達段階の相異による関数概念の形成過程 —その3，小学校第2学年と第4学年— 川崎医療短期大学　紀要　第3号　p.83，1983b
4. 坂田泩・片山英雄; 小学校算数科における関数概念の形成と授業の改善，日本教科教育学会誌　第6巻第1号　p.19，1981b