

# Resonance 近傍での対数写像とその反復写像の数値解析 およびタイプII間欠性カオス

川崎医科大学 物理教室, 津山工業高等専門学校\* 物理  
近藤芳朗・川部健\*  
(平成9年12月12日受理)

Numerical Analysis of Logarithmic Map and Its Iterates near  
Resonance, and Type-II Intermittent Chaos

**Yoshiro KONDO and Takeshi KAWABE\***

*Department of Physics, Kawasaki Medical School  
Kurashiki, 701-01, Japan*

*\*Division of General Education (Physics),  
Tsuyama National College of Technology,  
Tsuyama, 708, Japan*

(Received on December 12, 1997)

## 要 約

対数写像  $z_{n+1} = C + \ln z_n (|\arg(z_n)| < \pi/2, C = -0.65 - 1.179397i)$  について、不安定2周期点近傍での写像とその反復写像についての展開係数を数値解析によって求めた。数値解析にあたっては、各写像間の展開係数の関係を漸化式として解析的に求めたので容易に数値解を得た。また、問題にしている不安定2周期点は、非線形写像論における Resonance と呼ばれている状態に極めて近い状態であるので、Poincaré-Dulac の定理を援用して反復写像を解析的に求め、これにより数値解析による反復写像の正しいことを確認した。この結果、不安定2周期点近傍でのタイプII間欠性カオスのラミナーの長さ  $\langle N \rangle$  がコントロールパラメーター  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0$  でカオスが生成・消滅,  $\epsilon > 0$  でカオス状態) の逆数に比例することを示した。

## Abstract

Expansion coefficients of the complex logarithmic map  $z_{n+1} = C + \ln z_n (|\arg(z_n)| < \pi/2, C = -0.65 - 1.179397i)$  and its iterates at unstable point with periodic two, are determined by numerical analysis.

Numerical results are easily obtained by recurrence relations for expansion coefficients of maps. Explicit expressions of iterates obtained analytically by means of Poincaré-Dulac theorem. It is found that these expressions are correct numerically. As a result of this, statistical average of the length of laminar  $\langle N \rangle$  is proportional to inverse of the control parameter  $\epsilon$ .

## § 1. はじめに

著者たちはこれまでに対数写像  $z_{n+1} = C + \ln z_n$  についてのフラクタルとカオスについて研究してきた<sup>1-11)</sup>。これらの研究でわかつてきることは対数写像の示すカオスは間欠性カオスであ

るということでありパラメータ  $C$  の値を変化させると、この写像はタイプ I, II, III の間欠性カオスを示し、対数写像は間欠性カオスのよい研究対象であるということである。間欠性カオスはラミナーと呼ばれるシスティマティックな長い状態とバーストと呼ばれる変動の激しい短い状態を交互に繰り返すもので、このカオスではラミナーの長さは毎回異なりランダムに変動する。この様な間欠性カオスは、ラミナーの状態の性質により種々に分類されている<sup>12)</sup>。タイプ I の間欠性カオスは単調に増大または減少するラミナーをもち、タイプ III は振動を繰り返しながら振幅が単調に増大または減少するラミナーをもつ。一方、タイプ II の間欠性カオスは、2 次元的な螺旋運動であり動径が単調に増大するラミナーをもつ。これらは単純な非線形のモデル写像

$$z_{n+1} = \lambda z_n + u z_n^p \quad (1)$$

によって統一的に理解できる。ここに、定数  $\lambda$  は

$$\lambda = (1+\varepsilon) \exp(2\pi i \Omega) \quad (\varepsilon > 0) \quad (2)$$

であり、定数  $\varepsilon$  はコントロールパラメータである。カオスは  $\varepsilon=0$  で生成・消滅し  $\varepsilon>0$  でカオスの状態となる。タイプ I, II, III の間欠性カオスは  $\Omega$  が次の値をとるときに起こる<sup>12)</sup>。

$$\Omega = \begin{cases} 0 & \text{タイプ I} \\ \text{無理数} & \text{タイプ II} \\ 1/2 & \text{タイプ III} \end{cases} \quad (3)$$

この分類では  $\Omega$  の値が有理数となるのは 0 と 1/2 だけで  $\Omega$  が他の有理数  $q/p$  ( $p, q$  は互いに素) に等しくなる場合は入っていない。これまでに著者たちは  $C = -0.65 - 1.179397i$  の場合の対数写像によるタイプ II 間欠性カオスについて論じてきた<sup>9,10)</sup>。この場合の写像が上記の非線形モデル写像における  $\Omega = 15/31$  に近似していることも確認した。これらの間欠性カオスを研究する過程で、一般的な複素写像

$$z_{n+1} = F(z_n) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n z_n \quad (4)$$

が与えられたとき、これを  $p$  回繰り返した写像

$$z_{n+p} = F_p(z_n) \quad (5)$$

を数値的に求めるための計算法を開発した。この論文の目的の一つはこの繰り返し写像の数値解析法を紹介することであり、もう一つの目的は、この数値解析により数値的に明らかになった対数写像の性質を「Poincaré-Dulac の定理」を援用して解析的に明らかにし、これにより、対数写像におけるタイプ II の間欠性カオスの性質を研究することである。

## § 2. タイプ II 間欠性カオスについてのこれまでの研究経過

1996 年、複素対数写像について、タイプ II 間欠性カオスのラミナーの長さ  $N$  の初期値分布による統計平均値  $\langle N \rangle$  を数値シミュレーションによって求め、関係式

$$\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1} \quad (6)$$

を得た<sup>8)</sup>。複素対数写像での初期値の分布（再投入点の分布）は 1 次元的であった。Schuster の

教科書<sup>12)</sup>によれば、Type-II間欠性カオスについては初期値が2次元分布をする場合が $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$ であり、初期値が1次元分布をする場合は $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1/2}$ である。我々の結果はそのいずれにも一致しない。我々の対数写像では初期値の分布は原点を含まない1次元分布であり、Schusterによる議論では初期値は原点を含み終値までの一様分布を仮定しての結果である。この初期値分布の形態・範囲の違いが $\langle N \rangle$ に影響を及ぼすのではないかと考え、 $\langle N \rangle$ に対する初期値分布の依存性を調べた<sup>11)</sup>。この研究では初期値分布の重要性を指摘し、Crossover Behaviorの起こることを示し、Schusterの理論を含む $\langle N \rangle$ について的一般論を展開した。しかし、対数写像で $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$ の起こるメカニズムについては依然原因不明のままであった。次に、対数写像そのものがSchusterの扱っているモデル写像と異なるのではないかと考え、対数写像を数値的にも解析的にも詳細に分析した<sup>9,10)</sup>。この結果、不安定2周期点の1つ $z^* = -0.27706199339976 - 0.282537282228780i$ 近傍での対数写像を、 $z^*$ を原点とする新しい座標系で

$$z_{n+1} = \lambda z_n + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z_n^k \quad (7)$$

と表すとき、

$$\lambda^p = 1 + p\varepsilon, \quad p = 30.9968 \approx 31 \quad (8)$$

であり、

$$z_{n+p} = (1 + p\varepsilon)z_n \quad (9)$$

と線形写像に近似していることを見いだした。このことはPoincaré-Dulacの定理が関連していることを予想させるが、実際、直接法によって、込み入った計算ではあったが解析的にこれが証明された<sup>10)</sup>。すなわち、 $\lambda^p = 1 + p\varepsilon$ のとき

$$z_{n+p} = (1 + p\varepsilon)z_n + \varepsilon z_n^2 g_1(z_n) + z_n^{p+1} g_2(z_n) \quad (10)$$

を導出し、この写像を用いて(6)の関係式 $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$ を解析的に導いた。

### §3. 反復写像の数値解析

この節では、ある写像が級数の形で与えられたき、この写像をn回繰り返した写像を級数の形で求めることを考える。つまり、写像

$$z \rightarrow g(z) \quad (11)$$

をn回繰り返した写像

$$z \rightarrow g_n(z) \quad (12)$$

について考える。写像 $g_n(z)$ は漸化式

$$g_1(z) = g(z) \quad (13)$$

$$g_{n+1}(z) = g(g_n(z)) \quad (14)$$

から求められる。これらの写像がべき級数の形で

$$g_1(z) = \sum_{l=1}^{\infty} G(1, 1, l) z^l \quad (15)$$

$$g_n(z) = \sum_{l=1}^{\infty} G(n, 1, l) z^l \quad (16)$$

$$[g_n(z)]^k = \sum_{l=k}^{\infty} G(n, k, l) z^l \quad (17)$$

と与えられているとすると、これらの関係式を用いて

$$\begin{aligned} g_{n+1}(z) &= g_1(g_n(z)) \\ &= \sum_{l=k}^{\infty} G(1, 1, k) [g_n(z)]^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} G(1, 1, k) G(n, k, l) z^l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l G(1, 1, k) G(n, k, l) \end{aligned} \quad (18)$$

が得られる。この式を導出するにあたって、 $k, l$ についての和の順序を変えた。一方、

$$g_{n+1}(z) = \sum_{l=k}^{\infty} G(n+1, 1, l) z^l \quad (19)$$

であるから、次の漸化式1が得られる。

—— 漸化式 1 ——

$$G(n+1, 1, l) = \sum_{k=1}^{\infty} G(1, 1, k) G(n, k, l) \quad (20)$$

また、

$$\begin{aligned} g_n(z)^{k+1} &= \sum_{l_1=1}^{\infty} G(n, 1, l_1) z^{l_1} \sum_{l_2=1}^{\infty} G(n, k, l_2) z^{l_2} \\ &= \sum_{l=k+1}^{\infty} \sum_{m=k}^{l-1} G(n, 1, l-m) G(n, k, m) z^l \end{aligned} \quad (21)$$

であるから

—— 漸化式 2 ——

$$G(n, k+1, l) = \sum_{m=k}^{l-1} G(1, 1, l-m) G(n, k, m) \quad (22)$$

が得られる。漸化式1, 2を用いると、任意の展開係数  $G(n, k, l)$  が求まる。

#### § 4. 対数写像の数値解析

この節では対数写像

$$z_{n+1} = f(z_n) \quad (23)$$

$$f(z_n) = C + \ln z_n \quad (-\pi/2 < \arg(z_n) \leq \pi/2) \quad (24)$$

について考える。この写像の2周期点  $z^*$  は

$$z^* = g(z^*) \quad (25)$$

を満たす。ここに

$$g(z) = f(f(z)) \quad (26)$$

である。一般に、2周期点  $z^*$  近傍の点列は

$$z_{n+1} = g(z_n) \quad (27)$$

で与えられる。これを  $z^*$  の周りで展開すると

$$z_{n+1} - z^* = \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(z^*)(z_n - z^*)^k / k! \quad (28)$$

である。ここに、

$$g^{(1)}(z) = \frac{1}{zf(z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{f} \quad (29a)$$

$$g^{(2)}(z) = -\frac{1}{z^2} \left[ \frac{1}{f} + \frac{1}{f^2} \right] \quad (29b)$$

$$g^{(3)}(z) = \frac{1}{z^3} \left[ \frac{2}{f} + \frac{3}{f^2} + \frac{2}{f^3} \right] \quad (29c)$$

などである。一般に

$$g^{(l)}(z) = \frac{(-1)^{l-1}}{z^l} \sum_{i=1}^l \frac{A(l, i)}{f^i} \quad (30)$$

とすると、係数  $A(l, i)$  について、次の漸化式が成り立つ。

$$A(l+1, i) = lA(l, i) + (i-1)A(l, i-1) \quad i=1, 2, \dots, l+1 \quad (31a)$$

$$A(l, l') = 0 \quad l < l' \quad (31b)$$

$$A(1, 1) = 1 \quad (31c)$$

ここで、

$$B(l, i) = A(l, i) / l! \quad (32)$$

とおくと、 $B(l, i)$  に対する漸化式は

$$B(l+1, i) = \frac{l}{l+1} B(l, i) + \frac{i-1}{l+1} B(l, i-1) \quad i=1, 2, \dots, l+1 \quad (33a)$$

$$B(l, l') = 0 \quad l < l', \quad B(1, 1) = 1 \quad (33b)$$

となる。以上より、(28) は

$$z_{n+1} - z^* = \sum_{l=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{l+1}}{z^{*l}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B(l, i)}{f(z^*)^i} \right] (z_n - z^*)^l \quad (34)$$

となる。ここで、定数  $f(z^*)$  と  $z^*$  は複素数なので

$$f = f(z^*) = R_f e^{i\theta_f} \quad 0 \leq \theta_f < 2\pi \quad (35)$$

$$z^* = R e^{i\theta} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (36)$$

として、 $R_f$ ,  $\theta_f$ ,  $R$ ,  $\theta$  を定め、

$$\frac{1}{f^k} = \frac{1}{R_f^k} \left[ \cos(\theta_f \cdot k) - i \sin(\theta_f \cdot k) \right] \quad (37)$$

$$\frac{1}{z^*} = \frac{1}{R^l} \left[ \cos(\theta \cdot l) - i \sin(\theta \cdot l) \right] \quad (38)$$

として、実部と虚部に分けて複素数計算を行う。また、ニュートン・ラフソン法により  $z^*$  を精密に計算しておく。

### § 5. 数値解析の結果

前節までに導いた公式を用いて、モデル写像と複素対数写像およびこれらの繰り返し写像についての数値解析の結果を述べる。

#### [例 1] モデル写像

$$F_1(z) = \Omega z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{10} + \cdots \quad (39)$$

$$\Omega = R \exp(2\pi i/p) \quad (40)$$

について

$$\begin{aligned} F_N(\omega) &= F_1(F_{N-1}(z)) \\ &= \sum_{L=1}^{\infty} A(N, L) z^L \end{aligned} \quad (41)$$

$$A(N, L) = A_x(N, L) + iA_y(N, L) \quad (42)$$

とすると、次節の結果から

①  $R=1$  の場合

$$F_p(z) = z + O(z^{p+1}) \quad (43a)$$

②  $R=1+\varepsilon$  の場合

$$F_p(z) = (1+p\varepsilon)z + \sum_{k=1}^p O(\varepsilon)z^k + O(z^{p+1}) \quad (43b)$$

③  $\Omega = \exp(2\pi i/(p+\Delta p))$

$$F_p(z) = (1+2\pi i\Delta p/p)z + (2\pi i/p) \sum_{k=2}^{\infty} O(\Delta p)z^k + O(z^{p+1}) \quad (43c)$$

となる。数値解析の結果を表1～表3および図に掲げている。表1は  $p=7$  の場合の展開係数  $A(N, L)$  の実部  $A_x(N, L)$  と虚部  $A_y(N, L)$  の一覧表である。表2は  $p=7$ ,  $R=1.000001$  の場合の  $A_x(N, L)$  と  $A_y(N, L)$  の一覧表である。これらの結果は  $n=p=7$  のときいずれも(43a)～(43c)の結果を満たしているのがわかる。図は、表1の結果を  $N=1 \sim 15$  に拡張して図示したものである。図における各図の横軸は展開項の番号  $L$  を、縦軸は展開係数の絶対値  $|A(N, L)|$  を表している。縦軸の尺度は、1より大きい値の場合は対数目盛りでとてあり、0と1の間は等間隔目盛りでとてある。

#### [例 2] 複素対数写像

$$f(z) = C + \ln z, |\arg(z)| < \pi/2 \quad (44a)$$

$$C = -0.65 - 1.179397i \quad (44b)$$

$$G_1(z) = f(f(z)) \quad (45)$$

$$G_N(z) = G_1(G_{N-1}(z)) \quad (46)$$

不安定2周期点  $z^*$  は

$$z^* = f(f(z^*)) \quad (47)$$

を満たし、また、

$$G_{N+1}(z) - z^* = \sum_{L=1}^{\infty} A(N, L)(z - z^*)^L \quad (48a)$$

$$A(N, L) = A_x(N, L) + iA_y(N, L) \quad (48b)$$

とする。ここで

$$z^* = -1.5770614619 - 1.9745805868i \quad (49)$$

である。次節の結果から、また、 $z^*$ を原点とする座標系では

$$G_{N+p}(z) = \lambda^p z_N + z_N^p g_1(z_N) \Delta + z_N^{p+1} g_2(z_N) \quad (50)$$

となる。ここで、 $\Delta$ は(72d)で与えられる。実際、(44b), (49)の場合、 $p=31$ ,  $\Delta q=0.0015$ ,  $\varepsilon=2.6 \times 10^{-7}$ であるから、 $\Delta \approx 0.01$ となる。第4表が対数写像の場合の数値解析結果である。これは、 $N=1, 2, 30, 31$ かつ $1 \leq L \leq 35$ に対する展開係数 $A(N, L)$ の実部と虚部の一覧表である。 $N=p=31$ の場合が式(50)に対応する。これによると $2 \leq L \leq 31$ については

$A_x(N, L)$ と $A_y(N, L)$ は共に $\Delta=0.01$ より小さく、式(50)を満たしている。

### § 6. Resonance 近傍での対数写像とタイプII間欠性カオス

対数写像の解析に進む前に、先ず、非線形写像の normal form について概観する。 $n$ 次元ベクトル $x$ を $n$ 次元ベクトル $x' = F(x)$ に移す $n$ 次元写像

$$x' = F(x) = Ax + \sum_{m=2}^{\infty} W_m(x) \quad (51)$$

について考察する。ここに、 $A$ は $n$ 次元正方行列であり、 $W_m(x)$ は $x$ について $m$ 次の項を表し、ベクトル $x$ の成分はもちろん複素数である。非線形写像論によれば、行列 $A$ の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし

$$\lambda^m = \lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \cdots \lambda_n^{m_n}, \quad m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \quad (52)$$

と略記する。このとき、

$$\lambda_s \neq \lambda^m \quad (m \geq 2) \quad (53)$$

が成り立つとき、変換

$$x = y + \frac{W_m(y)}{\lambda^m - \lambda_s} \quad (54)$$

によって、 $x$ の写像 $F(x)$ を $y$ の写像に変換し $m$ 次の項 $W_m$ を消去することができる。すなわち、

$$y' = Ay + \sum_{k=2}^{m-1} W_k(y) + O(y^{m+1}) \quad (55)$$

となる。どんな $m$ に対しても(53)が成立するとき、 $n$ 次元写像 $F(x)$ は Non-Resonant であるという。変換(54)を $m=2, 3, \dots$ として順次 $W_m$ を消去していくとついに線形写像

$$y' = Ay \quad (56)$$

が得られる。しかし、

$$\lambda_s = \lambda^m \quad (57)$$

の場合には、変換(54)は発散するので $m$ 次の項 $W_m$ は消去できない。このように変換によって消去できない項 $W_m$ を Resonant な項と呼ぶ。したがって、変換(54)によって消去できる項を消去してしまえば、Resonant な項だけが残る。Resonant な項だけからなる写像は normal form であるという。こうして、次の Poincaré-Dulac の定理が得られる。

Poincaré-Dulac の定理

任意の写像  $x \rightarrow Ax + \dots$  ( $A$  は対角行列) は適当な変換

$x = y + \dots$  により normal form  $y \rightarrow Ay + W(y)$  に帰着される。

ここに、級数  $W(y)$  は Resonant な項だけから成る。

この定理を 1 次元複素写像の Resonance の場合に適用する。この場合、 $A$  は 1 次元の対角行列、すなわち、 $A$  は単なる数でこの値  $\lambda$  が当然固有値であり、 $p$  を正の整数とするとき

$$\lambda^p = 1 \quad (58)$$

が Resonance の条件となる。ここで、Resonant な項  $W_m$  は

$$m = kp + 1 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (59)$$

で与えられる。すなわち、1 次元複素写像

$$z \rightarrow \lambda z + \sum_{m=2}^{\infty} W_m(z) \quad (60)$$

は適当な変換によって

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \lambda z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{kp+1} \\ &= \lambda z + z^{p+1} G(z^p) \end{aligned} \quad (61)$$

の形の写像となる。

複素対数写像(27)は 1 次元写像の例であるから上の結果が適用できる。これを、不安定 2 周期点  $z^*$  で展開し、 $z_n - z^*$  を更めて  $z_n$  と記すと

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \sum_{k=1}^{\infty} g^{(k)}(z^*) \frac{z_n^k}{k!} \\ &= \lambda z_n + \sum_{m=2}^{\infty} W_m(z_n) \end{aligned} \quad (62)$$

ここで、 $p, q$  を互いに素なる正の整数とし

$$\lambda = (1 + \varepsilon) \exp(2\pi i q/p) \quad (63)$$

とおくと、

$$\lambda^p = (1 + \varepsilon)^p \approx 1 + p\varepsilon \quad (64)$$

であるので  $\varepsilon$  が非常に小さくても 0 に等しくない限り、この  $\lambda$  は Resonance の条件を満たさない。したがって、適当な変換

$$z_n = \xi_n + h(\xi_n) \quad (65)$$

によって、対数写像を線形写像に変形できる。ここで  $h(\xi_n)$  の具体的な形は不明であるが、この変換には  $W_{kp+1}$  を消去するための変換  $h_{kp+1}(\xi_n)$  が含まれている。これは

$$h_{kp+1}(\xi_n) = \frac{W_{kp+1}(\xi_n)}{\lambda^{kp+1} - \lambda} \sim \frac{W_{kp+1}(\xi_n)}{kp\varepsilon} \quad (66)$$

であるので  $h_{kp+1}(\xi_n)$  は  $\varepsilon$  に強く依存し、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $h(\xi_n)$  は発散し解析的でなくなる。この場合、初期値すなわち再投点の分布はこの変換によって  $\varepsilon$  に強く依存する分布となる。線形写像での Intermittency の長さ  $l$  は

$$l = \frac{\ln(\xi_f/\xi_0)}{\ln\lambda} \quad (67)$$

と簡単に求まるが、初期値  $\xi_0$  および終値  $\xi_f$  が変換(66)によって  $\varepsilon$  に強く依存し、その  $\varepsilon$  依存性が不明なので、 $l$  の初期値分布による統計平均は求められない。そこで、resonant に近い項  $W_{kp+1}(z_n)(k=1, 2, \dots)$  を残すという変換を行う。つまり、変換  $H$  を適当に選ぶことによって、すなわち、

$$\begin{aligned} z_n &= H(\xi_n) \\ &= \xi_n + h_\varepsilon(\xi_n) \end{aligned} \quad (68)$$

によって、変数を  $z_n$  から  $\xi_n$  に変換する。これによって写像(62)は

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n + \xi_n^{p+1} G(\xi_n^p), \quad G(0) \neq 0 \quad (69)$$

とすることができる。ここで、関数  $h_\varepsilon(\xi_n)$ ,  $G(\xi_n)$  は  $\varepsilon$  に強くは依存しないので、これらの関数は  $\varepsilon \rightarrow 0$  としても解析的である。この写像を  $p$  回繰り返すと

$$\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n + \xi_n^{p+1} u_\varepsilon(\xi_n^p) \quad (70)$$

ここに  $u_\varepsilon(0) \neq 0$  を満たす関数である（導出の詳細は付録参照）。

ここで、変数を  $\xi_n$  から  $z_n$  に戻す。

$$\begin{aligned} z_{n+p} &= H(\xi_{n+p}) \\ &= H(\lambda^p \xi_n + \xi_n^{p+1} u_\varepsilon(\xi_n^p)) \\ &= H(\lambda^p \xi_n) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{(k)}(\lambda^p \xi_n) [\xi_n^{p+1} u_\varepsilon(\xi_n^p)]^k / k! \\ &= H(\xi_n + \xi_n \Delta) + \xi_n^{p+1} v_\varepsilon(\xi_n^p) \\ &= H(\xi_n) + \sum_{k=1}^{\infty} H^{(k)}(\xi_n) (\xi_n \Delta)^k / k! + \xi_n^{p+1} v_\varepsilon(\xi_n^p) \\ &= H(\xi_n) + H^{(1)}(\xi_n) \xi_n \Delta + \xi_n^{p+1} v_\varepsilon(\xi_n^p) \end{aligned} \quad (71)$$

ここで

$$v_\varepsilon(\xi_n^p) = \sum_{k=1}^{\infty} H^{(k)}(\lambda^p \xi_n) \xi_n^{(p+1)(k-1)} [u_\varepsilon(\xi_n^p)]^k / k! \quad (72a)$$

$$\Delta = \lambda^p - 1 \quad (72b)$$

である。定数  $\Delta$  は

$$\Delta = (1 + \varepsilon) \exp(2\pi i q'/p), \quad q' = q + \Delta q \quad (72c)$$

の場合には

$$\Delta = p\varepsilon + 2\pi i \Delta q \quad (72d)$$

となる。

以上の計算においては  $\Delta^2$  以上の項は無視した。変換(68)において、 $h_\varepsilon(\xi_n)$  は  $\xi_n$  について 2 次以上の多項式であるから、(68)の逆変換は

$$\xi_n = H^{-1}(z_n) = z_n + O(z_n^2) \quad (73)$$

となる。また、 $H^{(1)}(\xi_n)$  は  $\xi_n$  の無限級数であり、その定数項  $H^{(1)}(0)$  は 1 に等しい。この逆変換を(71)に適用すると

$$z_{n+p} = (1 + \Delta) z_n + z_n^2 g_1(z_n) \Delta + z_n^{p+1} g_2(z_n) \quad (74)$$

の形の写像が得られる。ここで関数  $g_1, g_2$  の  $\varepsilon$  の依存性は無視した。この結果は数値解析によっても既に確認されていたところのものである。

著者達はこの写像を Poincaré-Dulac の定理を用いないで直接導出している<sup>10)</sup>。また、この写像に基づいてタイプIIの間欠性カオスについても論じ、ラミナーの長さ  $N$  の初期値分布による統計平均値  $\langle N \rangle$  が  $\varepsilon^{-1}$  に比例することも論じた<sup>9)</sup>。この節では変換された写像(70)に基づいてラミナーの長さの平均値  $\langle N \rangle$  について論ずる。

変数  $z_n$  の初期値分布は変換  $z_n = \xi_n + h_\varepsilon(\xi_n)$  によって変換  $\xi_n$  の初期値分布に変換される。明らかに  $z_n=0$  は  $\xi_n=0$  に変換される。今、 $\xi_n$  の絶対値を  $r_n$  とし、番号  $n$  は  $p$  を単位として数えるものとすれば上記の写像(70)の主要項は

$$r_{n+1} = (1 + p\varepsilon)r_n + v r_n^{2p+1} \quad (75)$$

となる。ここに、

$$r_n = |\xi_n| \quad (76a)$$

$$2v = |u_0(0)| \quad (76b)$$

である。この写像でのラミナーの長さ  $N$  の種々の初期値分布に対する統計平均値  $\langle N \rangle$  については文献 11) で詳細に論じてある。それによると

$$\langle N \rangle = \frac{\varepsilon^{-1}}{z-1} \int_{R_1}^{R_2} p(r_0) r_0 \ln \left( \frac{1 + \varepsilon r_0^{1-z}}{1 + \varepsilon R_1^{1-z}} \right) dr_0 \quad (77)$$

$$z = 2p + 1 \quad (78)$$

である。ここでは、ラミナーは初期値  $r_0$  と終値  $R_1$  のあいだで起こり、初期値  $\xi_0$  は  $R_1 \leq r_0 < R_2$  の範囲で一様分布し、その確率密度は  $\varepsilon$  に関係なく  $p(r_0)$  であるとした。というのは点列  $z_n$  の初期値  $z_0$  は(44b)の場合  $10^{-5} < \varepsilon < 10^{-3}$  に対して  $0.04 < |z_0| < 0.3$  であり、また、 $p=31$  があるので、この場合、写像(70)と(74)は数値的には有効数字 4~5桁の精度で  $\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n$  および  $z_{n+p} = \lambda^p z_n$  となる。これは  $0.04 < |z_0| < 0.3$  の初期値範囲に対しては変換(68)は  $z_n = \xi_n$  を意味する。すなわち、 $z_n$  についての初期値分布は形、大きさを変えないで  $\xi_n$  の初期値分布に変換される。以上のことから

$$R_1 < R_2 < R_1 \sim 0.5, \quad z = 63 \quad (79)$$

であり、 $\varepsilon > 10^{-10}$  に対して

$$\varepsilon R_1^{1-z} \gg 1 \quad (80)$$

であるので

$$\langle N \rangle = \varepsilon^{-1} \int_{R_1}^{R_2} p(r_0) r_0 \ln(R_1/r_0) dr_0 \sim \varepsilon^{-1} \quad (81)$$

が導かれる。これはシミュレーションの結果<sup>8)</sup>と一致する。

## § 9. おわりに

著者達は複素対数写像について、特定の不安定 2 周期点近傍での間欠性カオスを研究してきた。この論文では、この特定の不安定 2 周期点近傍での複素対数写像の性質を数値的にも解析

的にも詳細に検討した。その結果、この近傍での対数写像は非線形写像論でいうところの Resonance に近い事がわかった。この性質を利用して、タイプII間欠性カオスのラミナーの平均の長さ  $\langle N \rangle$  が  $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$  となることを解析的に導いた。この結果は既に求めていた数値シミュレーションの結果と一致するもので、従来の初期値の一様分布を仮定するタイプII間欠性カオス  $\langle N \rangle$  の  $\varepsilon$  依存性と異なるものである。しかし、既に述べたように、 $\rho$  を単位として  $N$  を測ると、 $\rho$  は一般に非常に大きいと考えられるので  $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$  が得られる。これがタイプIIの実験結果がいずれも  $\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1}$  を示している理由かも知れない。ラミナーの終値  $R_i$  が非常に大きいか、 $\rho$  が極端に小さい場合には異なる結果となることが期待される。これが今後の問題である。

## 附 錄

変換(69)は

$$\xi_{n+1} = \lambda \xi_n f_1(\lambda, \xi_n^p) \quad (A1)$$

とあらわすことができる。ここに、

$$f_1(\lambda, 0) = 1 \quad (A2)$$

である。変換(A1)をもう一度繰り返すと

$$\begin{aligned} \xi_{n+2} &= \lambda \xi_{n+1} f_1(\lambda, \xi_{n+1}^p) \\ &= \lambda (\lambda \xi_n f_1(\lambda, \xi_n^p)) f_1(\lambda, [\lambda \xi_n f_1(\lambda, \xi_n^p)]^p) \\ &= \lambda^2 \xi_n f_1(\lambda, \xi_n^p) f_1(\lambda, \lambda^p \xi_n^p f_1(\lambda, \xi_n^p)^p) \\ &= \lambda^2 \xi_n f_2(\lambda, \xi_n^p) \end{aligned} \quad (A3)$$

が得られる。ここに、

$$f_2(\lambda, \xi_n^p) = f_1(\lambda, \xi_n^p) f_1(\lambda, \lambda^p \xi_n^p f_1(\lambda, \xi_n^p)^p) \quad (A4)$$

であって

$$f_2(\lambda, 0) = 1 \quad (A5)$$

である。このような方法によって

$$\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n f_p(\lambda, \xi_n^p) \quad (A6)$$

$$f_p(\lambda, 0) = 1 \quad (A7)$$

が導出できる。また、

$$f_p(\lambda, \xi_n^p) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_p^{(k)}(\lambda, 0) (\xi_n^p)^k \quad (A8)$$

であるから、(A6)は

$$\xi_{n+p} = \lambda^p \xi_n + \xi_n^{p+1} u_\epsilon(\xi_n^p) \quad (A9)$$

$$u_\epsilon(\xi_n^p) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^p f_p^{(k)}(\lambda, 0) \xi_n^{p(k-1)} \quad (A10)$$

が得られる。

表1 モデル写像( $R=1$ ,  $p=7$ )の場合の展開係数  $Ax(N, L)$ ,  $Ay(N, L)$ **a**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
1	1	0.6234898019	0.7818314825
1	2	1.0000000000	0.0000000000
1	3	1.0000000000	0.0000000000
1	4	1.0000000000	0.0000000000
1	5	1.0000000000	0.0000000000
1	6	1.0000000000	0.0000000000
1	7	1.0000000000	0.0000000000
1	8	1.0000000000	0.0000000000
1	9	1.0000000000	0.0000000000
1	10	1.0000000000	0.0000000000

**b**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
2	1	-0.2225209340	0.9749279122
2	2	0.4009688679	1.7567593946
2	3	0.9695005377	2.7793781865
2	4	1.3019377358	4.8363944448
2	5	1.2469796037	8.3763796756
2	6	0.1234898019	14.5951193303
2	7	-3.8155112735	25.1886085812
2	8	-14.0537616790	42.5271938928
2	9	-37.4320593292	69.7398156196
2	10	-86.9611253663	110.1740810490

**c**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
3	1	-0.9009688679	0.4338837391
3	2	-2.0244586698	0.9749279122
3	3	-4.5489173395	1.7090685150
3	4	-9.9193867451	1.6071500843
3	5	-20.3463062353	-2.490899974
3	6	-37.5570410836	-17.6799963838
3	7	-59.5015504799	-59.6814100519
3	8	-69.0738030184	-157.2877560702
3	9	-8.6796848891	-351.7910961894
3	10	269.0569067110	-673.8186757070

**d**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
4	1	-0.9009688679	-0.4338837391
4	2	-1.4009688679	-1.7567593946
4	3	-1.5299003395	-5.0294908745
4	4	0.6980622642	-12.1306857743
4	5	11.5800078009	-24.1012782317
4	6	43.2468011588	-35.7495567810
4	7	112.2673424897	-26.5730584623
4	8	227.744863518	56.9553578959
4	9	350.5892405606	318.8515602251
4	10	305.4803421646	899.9153691362

**e**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
5	1	-0.2225209340	-0.9749279122
5	2	1.1234898019	-1.4088116513
5	3	3.7164801414	-0.9749279122
5	4	8.5794168018	2.75291117450
5	5	14.3513875470	16.2281596747
5	6	10.8374130473	49.8534626357
5	7	-28.5942842332	108.7748348635
5	8	-153.8100282926	176.1338725194
5	9	-431.8785369529	171.1040324084
5	10	-888.7297295458	-113.6432551603

**f**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
6	1	0.6234898019	-0.7818314825
6	2	0.9009688679	0.4338837391
6	3	0.4952970000	1.5159720852
6	4	-1.6600300568	2.9342295002
6	5	-7.820687163	1.9876388788
6	6	-17.6506629243	-11.0190288012
6	7	-11.5157426525	-55.0100116660
6	8	70.2234986146	-148.1902519986
6	9	376.4209422438	-271.4432921850
6	10	1203.6131048684	-249.6167963295

**g**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
7	1	1.0000000000	0.0000000000
7	2	0.0000000000	-0.0000000000
7	3	0.0000000000	-0.0000000000
7	4	0.0000000000	-0.0000000000
7	5	-0.0000000000	0.0000000000
7	6	0.0000000000	0.0000000000
7	7	0.0000000000	0.0000000000
7	8	2.9813534872	-25.9780410134
7	9	60.0662936837	-170.5293486908
7	10	450.7591640313	-655.1239121413

**h**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
8	1	0.6234898019	0.7818314825
8	2	1.0000000000	0.0000000000
8	3	1.0000000000	0.0000000000
8	4	1.0000000000	0.0000000000
8	5	1.0000000000	-0.0000000000
8	6	1.0000000000	0.0000000000
8	7	1.0000000000	0.0000000000
8	8	23.1692938825	-13.8661276835
8	9	177.7386420130	-111.3176725960
8	10	923.3168891267	-475.0381934151

**i**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
9	1	-0.2225209340	0.9749279122
9	2	0.4009688679	1.7567593946
9	3	0.9695005377	2.7793781865
9	4	1.3019377358	4.8363944448
9	5	1.2469796037	8.3763796756
9	6	0.1234898019	14.5951193303
9	7	-3.8155112735	25.1886085812
9	8	10.6095421340	51.2144565923
9	9	209.1209501770	155.8887418827
9	10	1324.0412843962	719.0024402995

**j**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
10	1	-0.9009688679	0.4338837391
10	2	-2.0244586698	0.9749279122
10	3	-4.5489173395	1.7090685150
10	4	-9.9193867451	1.6071500843
10	5	-20.3463062353	-2.490899974
10	6	-37.5570410836	-17.6799963838
10	7	-59.5015504799	-59.6814100519
10	8	-60.4884600858	-132.5887889883
10	9	49.7745468521	-61.0915233249
10	10	328.9976960055	1289.3863916782

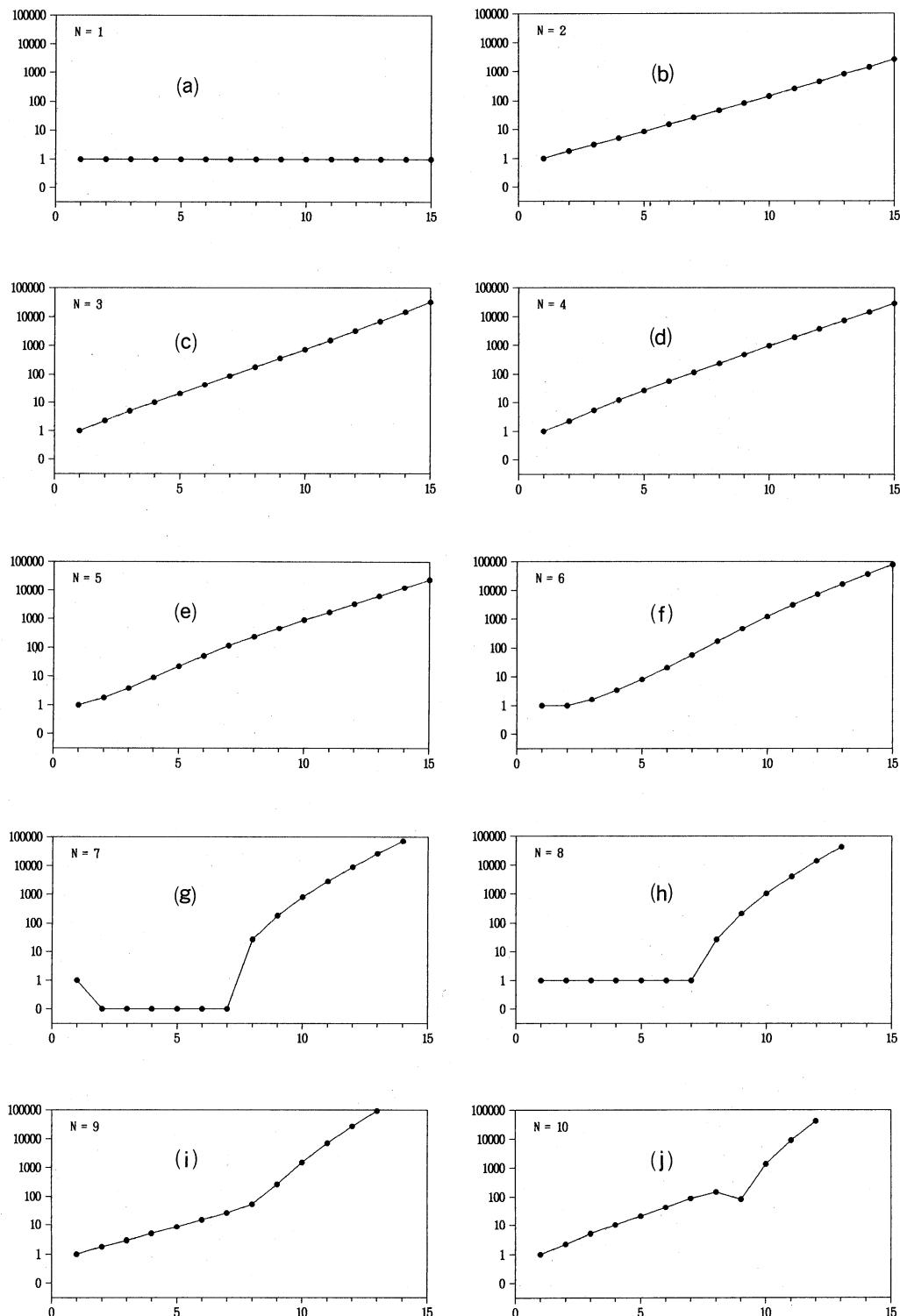
図 モデル写像 ( $R=1$ ,  $p=7$ ) の場合の展開係数  $|A(N, L)|$  横軸は  $L$  を、縦軸は  $|A(N, L)|$  を表す。

表2 モデル写像( $R=1.000001$ ,  $p=7$ )の場合の展開係数  $Ax(N, L)$ ,  $Ay(N, L)$ **a**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
1	1	0.6234904253	0.7818322643
1	2	1.0000000000	0.0000000000
1	3	1.0000000000	0.0000000000
1	4	1.0000000000	0.0000000000
1	5	1.0000000000	0.0000000000
1	6	1.0000000000	0.0000000000
1	7	1.0000000000	0.0000000000
1	8	1.0000000000	0.0000000000
1	9	1.0000000000	0.0000000000
1	10	1.0000000000	0.0000000000

**b**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
2	1	-0.2225213790	0.9749298620
2	2	0.4009690464	1.7567621263
2	3	0.9694997052	2.7793818337
2	4	1.3019346673	4.8364009044
2	5	1.2469700853	8.3763905482
2	6	0.12324663178	14.5951357534
2	7	-3.8155635090	25.1886306359
2	8	-14.0538710896	42.5272161465
2	9	-37.4322773418	69.7398173748
2	10	-86.9615409507	110.1740052758

**c**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
3	1	-0.9009715708	0.4338850408
3	2	-2.0244654216	0.9749294282
3	3	-4.5489311512	1.7090670422
3	4	-9.194117025	1.6071341820
3	5	-20.3463423472	-2.4909593015
3	6	-37.5570547661	-17.6801601532
3	7	-59.5014106916	-59.6817723386
3	8	-69.0731397878	-157.2883843362
3	9	8.6776502564	-351.7917658030
3	10	269.0618783448	-673.8180732892

**d**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
4	1	-0.9009724718	-0.4338854747
4	2	-1.4009725464	-1.7567693942
4	3	-1.5929847398	-5.0295154215
4	4	0.6981016162	-12.1307253168
4	5	11.5801284476	-24.1013000792
4	6	43.2470586229	-35.7494310108
4	7	112.2676645853	-26.5724698482
4	8	227.7446517049	56.9568959278
4	9	350.5870026920	318.8542587904
4	10	305.4728489025	899.9176265298

**e**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
5	1	-0.2225220466	-0.9749327868
5	2	1.1235008143	-1.4088166978
5	3	3.7165050442	-0.9749161836
5	4	8.5794449913	2.7529686275
5	5	14.3513690095	16.2283027714
5	6	10.8372148741	49.8537022038
5	7	-28.5948965113	108.7749736975
5	8	-153.8111601299	176.1332380586
5	9	-431.8794875535	171.102933408
5	10	-888.7276250385	-113.6495999315

**f**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
6	1	0.6234935428	-0.7818361735
6	2	0.9009724718	0.4338935414
6	3	0.4559148127	1.5159858479
6	4	-1.6600719756	2.9342302616
6	5	-7.8321450855	1.9875671756
6	6	-17.6506930193	-11.0193042311
6	7	-11.5153557713	-55.0107073808
6	8	70.2252194326	-148.1914221267
6	9	376.4257398898	-271.4443133784
6	10	1203.6235862891	-249.6154282550

**g**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
7	1	1.0000070000	0.0000000000
7	2	-0.0000078645	-0.0000017950
7	3	-0.0000048441	-0.0000060744
7	4	0.0000045358	-0.0000094617
7	5	0.0000190980	0.0000021093
7	6	0.0000038918	0.0000410958
7	7	-0.0001056141	-0.0000026490
7	8	2.9809595991	-25.9789521087
7	9	60.0662883980	-170.5343455184
7	10	450.7654442005	-655.1409344944

**h**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
8	1	0.6234947898	0.7818377371
8	2	1.0000105001	-0.0000072679
8	3	1.0000070000	-0.0000111647
8	4	1.0000049437	-0.0000198871
8	5	1.0000083394	-0.0000280805
8	6	1.0000054008	-0.0000287741
8	7	0.9999970347	-0.0000746935
8	8	23.1696541196	-13.8669874005
8	9	177.7417577331	-111.3229839503
8	10	923.3342902582	-475.0597202588

**i**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
9	1	-0.2225229367	0.9749366866
9	2	0.4009781600	1.7567794533
9	3	0.9695270650	2.7794077585
9	4	1.3019888833	4.8364501644
9	5	1.2470746354	8.3764906719
9	6	0.1236489955	14.5953565764
9	7	-3.8152454595	25.1890822050
9	8	10.6108022332	51.2152192300
9	9	209.1297342339	155.8896955086
9	10	1324.0888450229	719.0070916473

**j**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
10	1	-0.9009778776	0.43388080780
10	2	-2.0244858998	0.9749412822
10	3	-4.5489843365	1.7090982653
10	4	-9.195414429	1.607189980
10	5	-20.3466516764	-2.4909142209
10	6	-37.557739712	-17.6802665460
10	7	-59.5027175198	-59.6825082330
10	8	-60.4890977658	-132.5913765035
10	9	49.7806078421	-61.0907305042
10	10	329.0283521756	1289.4336035134

表3 モデル写像 ( $R=1$ ,  $p=7.000001$ ) の場合の展開係数  $Ax(N, L)$ ,  $Ay(N, L)$ **a**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
1	1	0.6234899021	0.7818314025
1	2	1.0000000000	0.0000000000
1	3	1.0000000000	0.0000000000
1	4	1.0000000000	0.0000000000
1	5	1.0000000000	0.0000000000
1	6	1.0000000000	0.0000000000
1	7	1.0000000000	0.0000000000
1	8	1.0000000000	0.0000000000
1	9	1.0000000000	0.0000000000
1	10	1.0000000000	0.0000000000

**b**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
2	1	-0.2225206839	0.9749279692
2	2	0.4009712182	1.7567593718
2	3	0.9695010053	2.7793782933
2	4	1.3019385641	4.8363948383
2	5	1.2469809979	8.3763808962
2	6	0.1234919078	14.5951223416
2	7	-3.8155084454	25.1886152792
2	8	-14.0537588255	42.5272079224
2	9	-37.4320591041	69.7398435749
2	10	-86.9611350825	110.1741343386

**c**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
3	1	-0.9009687010	0.4338840857
3	2	-2.0244584754	0.9749287780
3	3	-4.5489175248	1.7090702860
3	4	-9.193887842	1.6071532846
3	5	-20.3463138398	-2.4908953668
3	6	-37.5570620835	-17.6799946293
3	7	-59.5015969352	-59.681279766
3	8	-69.0738835801	-157.2878411148
3	9	-8.6797707534	-351.7913570862
3	10	269.0569839554	-673.8193132106

**d**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
4	1	-0.9009690904	-0.4338832770
4	2	-1.4009701501	-1.756759230
4	3	-1.5929934871	-5.0294915926
4	4	0.6980571937	-12.1306908204
4	5	11.5800049993	-24.1012957020
4	6	43.2468172860	-35.7495897952
4	7	112.2674179665	-26.57309977644
4	8	227.7450035710	56.9553777251
4	9	350.5895865945	318.8518471813
4	10	305.4806316317	899.9163299830

**e**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
5	1	-0.2225215590	-0.9749277695
5	2	1.1234891548	-1.4088130634
5	3	3.7164816453	-0.9749311054
5	4	8.5794240958	2.7529081303
5	5	14.3514058961	16.2281620517
5	6	10.8374437668	49.8534880470
5	7	-28.5942664304	108.7749133749
5	8	-153.8101096477	176.1340176535
5	9	-431.8788881783	171.1041543044
5	10	-888.7305431268	-113.6435250131

**f**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
6	1	0.6234892003	-0.7818319622
6	2	0.9009701248	0.4338832770
6	3	0.4559287648	1.5159736480
6	4	-1.6600299591	2.9342348753
6	5	-7.8320779106	1.9876486715
6	6	-17.6506982421	-11.0190249420
6	7	-11.5158318626	-55.0100612747
6	8	70.2233485712	-148.1904726553
6	9	376.4208112980	-271.4439073778
6	10	1203.6132802954	-249.6181403431

**g**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
7	1	1.0000000000	-0.0000008976
7	2	-0.0000002302	0.0000010084
7	3	-0.0000007789	0.0000006212
7	4	-0.0000012133	-0.0000005816
7	5	0.0000002704	-0.00000024489
7	6	0.0000052696	-0.0000004991
7	7	-0.0000003399	0.0000135424
7	8	2.9812366725	-25.9779905966
7	9	60.0656529566	-170.5293480132
7	10	450.7569737458	-655.1247174291

**h**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
8	1	0.6234906039	0.7818308429
8	2	0.9999990681	-0.0000013464
8	3	0.999985684	-0.0000008976
8	4	0.9999974499	-0.0000006339
8	5	0.9999963993	-0.0000010694
8	6	0.9999963104	-0.0000006926
8	7	0.9999904223	0.0000003801
8	8	23.1691836444	-13.8661738762
8	9	177.7379609582	-111.3180721168
8	10	923.3141288189	-475.0404247130

**i**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
9	1	-0.2225198088	0.9749281690
9	2	0.4009714400	1.7567582031
9	3	0.9695043296	2.7793747850
9	4	1.3019448806	4.8363878857
9	5	1.2469938365	8.3763674900
9	6	0.1235202232	14.5950989174
9	7	-3.8154505421	25.1885744969
9	8	10.6096399255	51.2142950147
9	9	209.1210724625	155.8876155362
9	10	1324.0418808432	718.9963417784

**j**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
10	1	-0.9009683115	0.4338848944
10	2	-2.0244569554	0.9749314038
10	3	-4.5489135247	1.709071058
10	4	-9.193817553	1.6071699208
10	5	-20.3463080591	-2.4908557025
10	6	-37.5570757255	-17.6799068445
10	7	-59.5016912956	-59.6812604057
10	8	-60.4887918733	-132.5887072182
10	9	49.7746485117	-61.0923004928
10	10	329.0037497907	1289.3824607881

表4 複素対数写像 ( $C = -0.65 - 1.179397i$ ) の場合の展開係数  $Ax(N, L)$ ,  $Ay(N, L)$ **a**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
1	1	-0.9948356950	0.1015010595
1	2	-0.5968443241	0.2673115366
1	3	-0.391093710	0.3259289681
1	4	-0.2567230490	0.3540926655
1	5	-0.1517195013	0.3708708510
1	6	-0.0579430657	0.3786756383
1	7	0.0317624332	0.3757184253
1	8	0.1194376856	0.3596647535
1	9	0.2045712646	0.3284821639
1	10	0.2851572167	0.2806229170
1	11	0.3581460749	0.2151521677
1	12	0.4197006929	0.1319193785
1	13	0.4654174508	0.0317525838
1	14	0.4905701286	-0.0833529155
1	15	0.4903974319	-0.2100730065
1	16	0.4604416719	-0.3436393232
1	17	0.3969382888	-0.4777894149
1	18	0.2972488806	-0.6048028971
1	19	0.1603232350	-0.7156437196
1	20	-0.0128314208	-0.8002268167
1	21	-0.2187029465	-0.8478236296
1	22	-0.4508843779	-0.8476151284
1	23	-0.6997832861	-0.7893928640
1	24	-0.9524765450	-0.6643982127
1	25	-1.1927589148	-0.4662774675
1	26	-1.4014331855	-0.1921160819
1	27	-1.5568852914	0.1565002630
1	28	-1.6359790889	0.5724662384
1	29	-1.6152918187	1.0422631620
1	30	-1.4726922701	1.5452888147
1	31	-1.1892392505	2.0535189362
1	32	-0.7513484343	2.5316137978
1	33	-0.1531417930	2.9375815427
1	34	0.6011430985	3.2240995278
1	35	1.4948446140	3.3405739988

**b**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
2	1	0.9793955949	-0.2019537542
2	2	0.0360675003	0.0558273038
2	3	0.1291660127	-0.0995593679
2	4	0.0573242139	-0.0275602540
2	5	0.0420895453	-0.0683387699
2	6	0.0282537748	-0.0536015832
2	7	0.0091471326	-0.0615110738
2	8	-0.0018538192	-0.0577260047
2	9	-0.0170191638	-0.0554958442
2	10	-0.0285431503	-0.0502918381
2	11	-0.0406507094	-0.0427742561
2	12	-0.0507036097	-0.0332321085
2	13	-0.0592925043	-0.0211442980
2	14	-0.0654604050	-0.0071211438
2	15	-0.0687767700	0.0088310139
2	16	-0.0686657064	0.0260759998
2	17	-0.0645940181	0.0440650917
2	18	-0.0561712988	0.0619448988
2	19	-0.0431076330	0.0787525836
2	20	-0.0253471003	0.0933582339
2	21	-0.0030668422	0.1045258532
2	22	0.0252414332	0.1109605678
2	23	0.0527469130	0.1113722579
2	24	0.0842425767	0.1045639149
2	25	0.1161370341	0.0895258348
2	26	0.1454649034	0.0655481076
2	27	0.1729260879	0.0323363371
2	28	0.1929575288	-0.0098691098
2	29	0.2038401197	-0.0601815955
2	30	0.2028435294	-0.1169721889
2	31	0.1874077594	-0.1778005928
2	32	0.1553588835	-0.2393845401
2	33	0.1051523468	-0.2976197969
2	34	0.0361340438	-0.3476625533
2	35	-0.0511947559	-0.3840845580

**c**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
30	1	-0.9958420971	-0.0911826190
30	2	-0.6484856847	0.0858419182
30	3	-0.3259530504	0.1428882253
30	4	-0.1423157155	0.1183579620
30	5	-0.0558098803	0.0767567904
30	6	-0.0195332216	0.0446587303
30	7	-0.00572355111	0.0250959579
30	8	-0.0008679548	0.0143110616
30	9	0.0007424567	0.0085271909
30	10	0.0012419923	0.0053440131
30	11	0.0013538180	0.0034810705
30	12	0.0013119169	0.0023104030
30	13	0.0011977407	0.0015309545
30	14	0.0010475496	0.0009937806
30	15	0.0008829319	0.0006190259
30	16	0.0007186224	0.0003589973
30	17	0.000547885	0.0001820918
30	18	0.0004280115	0.0000656174
30	19	0.0003120287	-0.0000074238
30	20	0.0002184007	-0.00000499267
30	21	0.0001459902	-0.00000714250
30	22	0.0000963691	-0.00000785005
30	23	0.0000638332	-0.00000751221
30	24	0.0000451865	-0.00000630167
30	25	0.0000340073	-0.00000429157
30	26	0.0000208029	-0.0000167469
30	27	-0.0000056935	0.00000635561
30	28	-0.00000516999	0.0000021556
30	29	-0.00000798241	-0.00000744205
30	30	0.0000451867	-0.0002189230
30	31	0.00007368272	0.0001877357
30	32	0.0337762443	0.0066359185
30	33	0.3457309790	-0.0397194789
30	34	1.7370137421	-1.0959962350
30	35	4.2550790455	-8.4174834791

**d**

N	L	$Ax(N, L)$	$Ay(N, L)$
31	1	0.9999543972	-0.0103673039
31	2	0.0009489440	0.0032590625
31	3	0.0082514918	-0.0023462237
31	4	0.0025786003	-0.0010334493
31	5	0.0017885005	-0.0012313435
31	6	0.0009860177	-0.0010070414
31	7	0.0005596017	-0.0008665919
31	8	0.0002811393	-0.0006927864
31	9	0.0001178037	-0.00005453462
31	10	0.0000207355	-0.0004199153
31	11	-0.0000331126	-0.0003173795
31	12	-0.0000598985	-0.00002347996
31	13	-0.0000692759	-0.0001691656
31	14	-0.0000678768	-0.00001180270
31	15	-0.0000603645	-0.0000789239
31	16	-0.0000499282	-0.0000496943
31	17	-0.0000388748	-0.00000283673
31	18	-0.0000287004	-0.0000131914
31	19	-0.0000203818	-0.0000027749
31	20	-0.0000144541	0.0000039865
31	21	-0.0000110406	0.0000077427
31	22	-0.0000099342	0.0000087701
31	23	-0.0000103092	0.0000069906
31	24	-0.0000106888	0.0000021521
31	25	-0.0000083855	-0.0000052420
31	26	0.0000003313	-0.0000129531
31	27	0.0000183290	-0.0000127611
31	28	0.0000416123	0.0000109963
31	29	0.0000273614	0.0000820654
31	30	-0.0001238228	0.0001499319
31	31	-0.0007285866	-0.0003768359
31	32	-0.0332658269	-0.0031169723
31	33	-0.2958109889	0.0685733199
31	34	-1.2279710320	1.0771514550
31	35	-1.8825905610	6.8396520287

## 参考文献

- 1) Kawabe T and Kondo Y: Fractal Transformation of the One-Dimensional Chaos Produced by Logarithmic Map. *Prog. Theor. Phys.* 85: 759-769, 1991
- 2) Kawabe T, Kondo Y: Intermittent Chaos Generated by Logarithmic Map. *Prog. Theor. Phys.* 86: 581-586, 1991
- 3) 近藤芳朗, 川部健: 複素力学系  $z_{n+1} = C + \log z_n$  のフラクタル. *川崎医学会誌一般教養篇* 第16号: 83-91, 1991
- 4) 堀悦男, 川部健, 近藤芳朗: 複素力学系  $z_{n+1} = C + \ln z_n$  の転移点近傍の構造. *津山工業高等専門学校紀要*, 第29号: 1-4, 1991
- 5) 川部健, 近藤芳朗: 「対数写像が描くフラクタルの妙」. *科学朝日* 1月号: 132-133, 1991
- 6) Kawabe T, Kondo Y, Aoyama Y: Critical Behavior of a Complex Logarithmic Map. *Rep. Res. Lab. for Surf. Sci.* 7: 35-40, 1991
- 7) Kawabe T, Kondo Y: Scaling Law of the Mean Laminar in Intermittent Chaos. *J. Phys. Soc. Jpn.* 65: 879-882, 1996
- 8) Kawabe T, Kondo Y, Tanaka M: Scaling Properties of Type-II Intermittency. *Prog. Theor. Phys.* 96: 1-11, 1996
- 9) Kondo Y, Kawabe T: On type-II Intermittency around Resonance. *J. Phys. Soc. Jpn.* 65: 4084-4085, 1996
- 10) Kawabe T, Kondo Y: Normal Form of Intermittency with Resonance. *Rep. Res. Lab. for Surf. Sci.* 7: 231-236, 1996
- 11) Kondo Y, Kawabe T: Crossover Behavior in the scaling law of type-II intermittency. *Phys. Letters* A225: 73-78, 1997
- 12) Schuster H G: *Deterministic Chaos*. 2nd ed, VCH, Weinheim. 1988, pp. 79-102
- 13) V. I. Arnold: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin. 1983, pp. 180-221
- 14) Huang JY, Kim JJ: Type-II intermittency in a coupled nonlinear oscillator: Experimental observation. *Phys. Rev. A* 36: 1495-1497, 1987
- 15) Sacher J, Elsässer W, Göbel EO: Intermittency in the Coherence Collapse of Semiconductor laser with External Feedback. *Phys. Rev. Lett.* 63: 2224-2227, 1989