川崎医会誌一般教，30号：63－75(2004)

円周率πの手計算史

川崎医科大学　情報科学教室

近　藤　芳　朗

(平成17年３月16日受理)

Short History of Longhand Calculation of π

Yoshiro KONDO

Department of Information Sciences,
Kawasaki Medical School,
577 Matsushima, Kurashiki, Okayama, 701-0192, Japan
(Received on March 16, 2005)

概　　要

この論文では円周率πの最後の手計算について述べる。シャンクスが1874年円周率を小数点以下707桁求めた値はリヒターによって500桁まで正しいことは確認されていたが，果たしてどこまで正しいかわかっていなかった。1946年ファーガソンがπを540桁まで求めたとき，シャンクスの値は528桁目から間違っていることが判った。ファーガソンと平行してレンチとスミスはπの手計算を開始し，互いに確認し合いながらπの計算桁数を伸ばしていった。彼らが808桁計算したのち，レンチとスミスが1120桁の最終チェックをする直前，人類史上初の電子計算機（ENIAC）によるπ計算が遂行され，πの小数点以下2035桁が発表された。しかし，レンチとスミスはなおも手計算を進め，1956年1160桁求めたところで一連の手計算を終了した。
キーワード：円周率，手計算

Abstract

In 1873, William Shanks evaluated π to 707 decimal places. The accuracy of his calculation to at least 500 decimal places was confirmed by the independent calculation of Richter. For more than 70 years Shanks' calculation has been accepted as the value of π, apparently without any doubts. However, in 1946, it was found by Ferguson's calculation of π to 540 decimal places that Shanks' value was incorrectly calculated beyond 527 decimal places. In 1945, Wrench and Smith undertook the computation of π and, in 1948, Ferguson and Wrench & Smith concluded with an 808 decimal places approximation to π of guaranteed accuracy. Subsequently, Wrench and Smith resumed their calculations and by June 1949 obtained an approximation to 1120 decimal places. Before final checking of this extension could be completed, the ENIAC (Electronic Numerical Integrator and Computer) was employed in September 1949 to evaluate π to 2035 decimal places. In 1956, Wrench and Smith extended their calculation, and this work was terminated at 1160 decimal places. Key words: pi, longhand calculation

Correspondence to Yoshiro Kondo
(e-mail：kondo@med.kawasaki-m.ac.jp)

1．はじめに

イギリス人のシャンクス（William Shanks）は1873年手計算によって円周率πを小数点以下707桁まで算出し，驚異的な記録を残した。しかし，これが手計算による最高記録ではない。この計算が小数点以下528桁から間違っていることはよく知られているがこの誤りは電子計算機によって最初に発見されたのでもない。シャンクスの後，πの手計算はファーガソンらによって20世紀半ば頃から始められ，その最初の計算でシャンクスの誤りが指摘されたのである。また，この一連の手計算は最後には卓上計算器を用いて遂行され，1949年電子計算機ENIAC（Electronic Numerical Integrator and Computer）がπの値を2035桁計算した後も続けられた。レンチとスミスは1956年，1160桁計算したところで計算を止めた。これが手計算の最高記録である。

この論文ではアルキメデスからルドルフまでを簡単に述べ，つづいてπの級数展開公式を用いるシャープからクラウゼンまでを概観する[1-6]。焦点はシャンクスからファーガソンまでで，この計算過程を原典[7-23]にもとづいて詳述する。以下では特に断らないかぎり円周率の計算桁数は小数点以下の桁数を表わす。また，この論文のもう一つの目的は歴代のπ計算者の計算した正しい計算桁数を確認することである。

2．アルキメデスからルドルフまで

円は大きい円も小さい円も皆互いに相似であって，円周の直径に対する比はすべての円で等しい。この値を円周率といって記号πで表わす。日本語の「円周率」は実に簡潔で意味のわかる良い用語である。しかし，外国語にはこのような簡潔な要領を得た用語はない。それで記号πを音読みしてpiと表わす。でなければWilliam Rutherfordの論文[7]の題名「Computation of the Ratio of the Diameter of a Circle to its circumference to 208 places of figures」に用いられているように「the ratio of the diameter of a circle」と表わすしかない。円周率πを理論的に最初に求めた人はシラクサの科学者アルキメデス（Archimédés, BC287-212）である。アルキメデスは「てこの原理」の発見，浮力に関する「アルキメデスの原理」の発見，「アルキメデスのらせん」の研究，「放物線・球・円柱などの面積・体積」の研究などで有名な「数理科学の父」と呼ばれている第一級の科学者である。アルキメデスと比肩できる者はニュートンぐらいである。このアルキメデスが円周率を最初に求めた。その方法は円に内接する正多角形の周囲と外接する正多角形の周囲の長さを求め円周の長さはこの内接正多角形の周囲より大きく，外接正多角形の周囲より小さいとして，円周率πを求めた。すなわちまず，内・外接正6角形の周囲の長さを計算し，この計算結果をもとに内・外接正12角形の周囲の長さを求める。このようにして，辺の数を倍々にしていき正96角形になるまで計算していった。その結果，

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

を得たのである。小数に直せば

$$3.1408<\pi<3.1428$$

であるからアルキメデスは$\pi=3.14$と小数第2位まで正しく求めたことになる。この方法はアルキメデスの計算から1800年も後になってから復活した。1593年オランダのアドリアン・ヴァン・ルーマン（Adriaen van Rooman, 1561-1615）は正2^{30}角形から小数15桁を正しく求め，1596年にはオランダのライデン大学教授のドイツ人ルドルフ・ヴァン・クーレン（1540.1 23-1610.12.31, Ludolph van Ceulen）が正6×2^{33}角形から小数20桁を正しく求め，1610年には正2^{62}角形から小数35桁を正しく求めた。これがルドルフが一生かけて求めたπの値である。この値はルドルフの死後，彼の奥さんが発表したものといわれている。このルドルフの小数35桁の値はライデン市のセント・ペーテル寺院のルドルフの墓に刻まれていたが墓は19世紀に壊された。しかし，西暦2000年に復元されたという[24]。ドイツでは円周率のことを「ルドルフの数」（die Ludolphsche Zahl）と呼んでいる。墓には，

$$3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288<$$
$$<\pi<3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50289$$

と同等の内容のことが刻まれている。この不等式から

$$\pi=3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \cdots$$

が結論できる。ルドルフは小数35桁を正しく求めていたのである。

したがって，ドウラエの著書[4]では「ルドルフは35桁目で間違っていた」とあるがこれは誤りである。ルドルフが20桁求めた多角形の辺数も60×2^{33}と60×2^{29}の2通りの記述が見られるがおそらくどちらも間違いである。

これらの辺数についてアルキメデスの方法によりπを算出すると前者は22桁正しく，後者は19桁しか正しくない。因みに，$n=2^{62}$の場合は35桁正しく求まる。これが墓碑銘に刻まれていることからルドルフは正しく求められるはずの桁を正しく求めていることになる。したがって，他のnの値の場合でも正しく計算しているとすれば20桁正しく求められるはずのnで計算していることになる。それは$n=60\times2^{33}$でも$n=60\times2^{29}$でもない。平山諦によれば根拠を示さず$n=6\times2^{33}$の間違いではないかと述べている。実際，コンピュータで計算してみると正しく20桁求まる。これを補強する根拠として，平山の文献[1]に次のような記述がある。

“ルドルフは1596年に西洋の文献では60×2^{33}角形の計算をしたとあるのは，6×2^{33}角形の誤りではなかろうか。布教のため中国に来た天主教徒のロー（中国名　羅雅谷）の作った測量全儀には

$$3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3846<\pi<3.1415\ 9265\ 3589\ 7932\ 3847$$

が掲げてある。測量全儀には「今士之法」とあって誰の計算か不明であるが，これより100年後に出版された数理精蘊（うん）には円に内接・外接する正6，12，24，48，96，…，6×2^{33}角形まで，それぞれ一辺の長さが30桁ずつ，克明に書き連ねてある。恐らくルドルフの計算が間もなく中国に伝わったものと思われる。”

3．級数によるπ計算

1699年アブラハム・シャープ（Abraham Sharp 1651-1742，英）はイギリスの天文学者エドムンド・ハレー(Edmund Halley 1656.10.29-1743.1.14）の指導のもとで公式

$$\frac{\pi}{6}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

を用いて小数72桁計算した。正しい計算桁数は71桁であった。ハレーはハレー彗星を発見し，また，ニュートンに『プリンキピア』を書くよう説得したことでも有名な天文学者である。

1706年ジョン・マーチン（John Machin, 1680-1752，英）が有名なマーチンの公式

$$\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$$

を発見し，これを用いて小数100桁まで正しく計算した。この公式は後にラザフォード，シャンクス，電子計算機ENIACなどのπ計算で用いられた。ジョン・マーチンはロンドンのグレシャム・カレッジ（Gresham College）の数学者で天文学の教授であった。

1719年トマ・ファンテ・ドゥ・ラニュイ（Thomas Fantet de Lagny, 1660-1734，仏）は公式

$$\frac{\pi}{4}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)$$

を用いて小数127桁計算した。後述のヴェガの計算によって，ラニュイの計算には1字ミスプリントのあることがわかった。小数113桁目が8でなければならないのに7と印刷されていた。文献によっては，ラニュイの計算は112桁しか正しくないと記述しているものが多いが，実際は113桁目1字だけのミスプリントであとはすべて正しい。したがって，ラニュイは127桁正しく計算したといってよい。ラニュイはフランスの数学者である。なお，ラニュイの用いた公式は1738年スイスの大数学者オイラー（Leonhard Euler, 1707-1783, Basel）が発見，1776年にはチャールズ・ハットン（Charles Hutton, 1737-1823，英）が再発見したものである。

1789年ゲオルグ・フォン・ヴェガ男爵(Baron Georg von Vega, 1756-1802, オーストリア）が，1776年ハットンによって発見され，1779年にはオイラーによって独立に発見された公式

$$\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$$

を用いて小数143桁まで計算したが126桁までしか正しくなくラニュイの記録を破れなかった。

再度挑戦した1794年には1755年オイラーによって発見された公式

$$\frac{\pi}{4}=5\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)+2\mathrm{ATN}\left(\frac{3}{79}\right)$$

を用いて140桁計算したが136桁しか正しくなかった。

1837年カレー（J. F. Callet, Paris, France）は154桁まで計算し，152桁が正しい値であった。

1841年ウィリアム・ラザフォード（William Rutherford, 1798-1871，英）はオイラーが1764

年発見した公式

$$\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{70}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{99}\right)$$

を用いて，208桁計算したが152桁しか正しくなかった[7]。これは次のダーゼの計算[8]によって明らかになった。

1844年ヨハン・マルティィーン・ツァハリアス・ダーゼ（Johann Martin Zacharias Dahse, 1824-1861, Wien）はたった2か月間で，シュルツ・フォン・シュトラスニツキー（L. K. Schulz von Strassnitzky, 1803-1852，ウィーン大学）の発見した公式

$$\frac{\pi}{4}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{8}\right)$$

を用いてしかも暗算で205桁計算した[8]。正しい計算桁数は200桁であった。ダーゼは暗算の名人で暗算で8桁の数の掛算は54秒，20桁の数の掛算は6分，40桁の数の掛算は46分，そして100桁の数の掛算は8時間45分で計算したという。

しかし，この時点で200桁を超えて計算したのはラザフォードの208桁とダーゼの205桁だけであったから，この両者が153桁めからくい違っているといってもどちらが間違っているのか，あるいは，両者が間違っているのかわからなかった。このくい違いを明らかにするためにトーマス・クラウゼン（Thomas Clauses, 1801-1885，独）とレーマン（W. Lehmann, Potsdam）が計算をはじめた。

1847年トーマス・クラウゼンは2つの公式

$$\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$$

を用いて共に250桁まで計算して，その結果は248桁まで一致した。こうして，ラザフォードが153桁目から間違っており，ダーゼが200桁まで正しいことが確定した。

1853年になってレーマンも261桁正しく計算した。用いた公式は

$$\frac{\pi}{4}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$$

である。

4．ラザフォード，シャンクス，リヒター

クラウゼンの計算によって自分の誤りがはっきりしたとき，ラザフォードは名誉を回復しようと考えていた。弟子のシャンクス（William Shanks, 1812-1882，英）にπ計算を依頼して

いたのか，あるいはシャンクスが師の計算に興味を持って自発的に始めたものかはわからないが，1850年頃シャンクスはマーチンの公式を用いて円周率を318桁まで計算していた。ラザフォードはこの計算を引き継いで400桁まで伸ばすためにシャンクスと同じマーチンの公式を用いて441桁計算した。シャンクスも計算を再開してラザフォードの441桁を確かめただけでなく，530桁まで計算を伸ばした。ラザフォードとシャンクスの結果はいずれもラザフォードの論文[11,12]に掲載されている。こうして，円周率πは小数441桁まで正しいことが確認された。シャンクスは正しい計算桁数より3桁余分に計算して発表している。

この後， Elbingのリヒター（Richter）教授が円周率計算の結果を次々と発表する[9]。1853年に333桁発表し，1854年には400桁発表する。この論文で前回の333桁の最後3桁すなわち331，332，333桁の098を962に訂正する。1854年10月500桁を発表する。1855年500桁計算の訂正をする。449，450桁の64を48に訂正，480桁の5を4に訂正する。このようにして，リヒター教授は500桁の計算を発表したのであるがいずれの論文にも使用した公式が記載されていない。しかし，平山諦[1]によるとリヒターが使用した公式はマーチンの公式とある。

このリヒターの500桁はシャンクスの結果と一致したので，シャンクスの計算は500桁までは正しいことがこの時点で確認された。

一方，シャンクスは530桁発表した同じ年1853年607桁計算した詳細な論文を発表した。ところがどうしたことかこの計算では459桁までしか正しくなかった。といっても，460桁以降をでたらめな計算をしたわけではない。リヒターによって500桁まで正しいことが確認されていたのだから。しかし，シャンクスはこのことに気づかないまま707桁まで計算を伸ばし1873年に発表した[13]。しかし，すぐに誤りに気づいて訂正の論文をだした[14]。しかし，シャンクスは疲れて混乱の極みにあった。シャンクスの訂正は次の通りである。

ATN(1/5)， ATN(1/239)は共に709桁算出した。第1の訂正はATN(1/5)の75桁目の7が誤りで8に訂正。これは表記上のミスでπの計算には影響はない。第2の訂正はATN(1/5)の461，462桁目の表記96は正しいのであるがπを計算するときに88と計算したので，その差8はπの計算では16倍されて128になる。ところがどうしたことか，この128をπの460，461，462桁目に加えるべきところを何と513，514，515桁に加えて発表した。それで，訂正論文ではπの460，461，462桁目の834に128を加えて962に訂正する一方，513，514，515桁目の193は128を減じて065に訂正した。これが第2の訂正である。どうしてこうなったのか，シャンクスは論文でperhaps from being overworkedと述べている。ラザフォードに送った530桁を発表したときの資料では正しくなされていたが，そのコピーをシャンクスは持っていなかったのが混乱の原因ではないだろうか。1873年の訂正論文では1873年の本論文ではなかったミスが起きた。1873年の本論文では326桁目が正しく2と表記されていたのが訂正論文ではそれが3に誤って記載された。この326桁目は単なるミスプリントであるから他は正しいものと信じられていた。それで1937年パリで万国博覧会が開催された際，第31番目の部屋が「πの部屋」としてシャンクスのπ707桁が（整数部の3を含めると708桁）飾れられた。入り口にはオイラーの公式

$e^{i\pi}=-1$が飾られていたのである。現在はパリの発見館になっている。もちろん正しいπの値で飾られている。

一松信『数のエッセイ』ではシャンクスの計算は小数706桁しか掲載されていない。しかも，565桁目が6であるべき数字が5に印刷されており，また，625桁目の1が脱落している。

5．ファーガソン　レンチ，スミス

シャンクスが707桁計算してから70年ほどたった1944年5月，Royal Naval College (Eaton, Chester) でのファーガソン (D. F. Ferguson) の同僚 R. W. Morris はπ計算のためのオリジナルな公式

$$\frac{\pi}{4}=3\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{4}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{20}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{1985}\right)$$

を発見した。しかし，この公式は1893年に S. L. Loney が，また，1896年に Carl Stormer によって既に発見されていたものであるが，そのことを知らなかったファーガソンはこの公式を用いて円周率πを100桁ぐらい計算して試したい気になった。実際，やってみると予想外に面白く，Shanks の数字をチェックすることも考えて計算を続行した。一年後の1945年5月には530桁まで達した。この530桁は Shanks がまさに最初に発表した桁数である。この桁数に達するまでに Shanks の数字と異なる結果が出たときその間違いの原因を発見するのはいつも大変困難であった。しかも，このような間違いは写し間違いも含めて，次から次へと起こった。しかし，この530桁目はシャンクスの数字と完全に異なっているだけでなくどんなに努力をしてもミスは発見できなかったという。ファーガソンはその後三週間ぐらい実りのない努力をしたあとで，二つの級数の和 ATN(1/20)＋ATN(1/1985) を一つの級数 ATN(1/99) に結びつけることを考え，次の4か月間のほとんどの時間をこの独立したチェックに費やした。その結果，その個所のファーガソンの計算は完全に正しいことが確認できたのである。こうしてファーガソンの努力は報いられた。しかし，ATN(1/4) の計算の満足のいく独立したチェックは見つからなかったので，転写間違いなどないことを確認のうえより厳密なチェックをしたがそれでもミスは見つからなかった。この厳密なチェック体制というのは3，4人の同僚に間違いの可能性が無視できるくらい多くのチェックをしたり，互いにチェックし合ったり，ともかく全員が一致するまで続けるというものであった。こうして，シャンクスは間違っていることがはっきりした。シャンクスは528桁目から間違っていたのだ。ファーガソンの結果は Nature 誌に1946年3月16日号に掲載された[15]。この論文ではπの521桁目から540桁目までをシャンクスとファーガソンの値を並べて発表している。527桁目までは両者は一致していたが528桁目からはくい違っていた。こうして，シャンクスのπは小数528桁目から間違っていることが明確になった。さらに，ファーガソンは Math. Gazette (1946)[16]で，シャンクスは ATN(1/5) の項 $(1/5)^{145}/145$ を569桁目から落としているのではないかと指摘した。

次いで，Mathematical Tables and other Aids to Computation (MTAC, 1946) で R. C.

Archibald教授がファーガソンのπ計算620桁を公表した[18]。このようなファーガソンのπ計算の活動を知ったR. C. Archibald教授は1945年12月 John W. Wrench博士にMachinの公式を用いて独立の計算を行うことを提案した。1946年4月 Wrench博士はLevi B. Smith（Talbotton, Georgia）と連絡をとり，Smithが1940年11月にATN(1/239)の計算にとりかかり，1944年2月には820桁まで計算していたことを知った。そこでWrench博士は大急ぎでATN(1/5)の計算を始めた。もちろんSmithのATN(1/239)と一緒にしてMachinの公式からπを求めるためである。Wrenchは1947年1月までにATN(1/5)を850桁まで求めた。一方，FergusonはWrench, Smithとは独立に1946年11月にはπ計算を700桁に伸ばし，1947年1月には710桁まで伸ばした。そこで，これらの計算結果を比較検討するため，1947年4月MTAC誌2巻pp.245-248にArchibald教授の論評と共にSmith and WrenchとFergusonの結果を掲載した[19,20]。この論文ではSmith and Wrenchの計算によるATN(1/5)とATN(1/239)はともに811桁掲げ，Fergusonの計算によるATN(1/4)，ATN(1/20)，ATN(1/1985)はいずれも712桁掲げたうち最後の2桁は不確定要素付きとした。そして，πの値については808桁（+2桁の不確定要素）を発表した[21]。この808桁の桁数は既に1946年4月にPeder Pedersonが計算していたe計算の808桁に合わせたものである。このπ計算808桁のうち710桁はFergusonの値と一致した。

Smith and Wrenchの計算チェックは卓上計算機（duplicate machine calculation）を用いて，Fermat-Euler Thorermを用いる整数論的なチェックであった。Fergusonも710桁の計算には，Wrenchによると卓上計算機（desk calculator）を用いたということである。

このようにして，1947年4月にはπは710桁まで正しいことが確かめられ公表されたのである。

1947年5月Fergusonは750桁まで計算し，Wrenchの計算において723-743桁に誤りを発見する（これはATN(1/5)の725-743桁の誤りに起因するもの）したがって，722桁まで正しいことが確認される。

1948年Fergusonが812桁まで計算する。この間，Wrenchの計算では723-808桁までのうち12個の数字を変更して完璧なものとなった。こうして，π計算の808桁まで正しいことが確認された。SmithのATN(1/239)は811桁までは終始正しく最初の計算から一度も変更する必要はなかった。

WrenchとSmithは808桁を越えてなおも計算を続けた。1949年7月24日にはATN(1/239)の1120桁の計算とチェックを完了。1949年6月までにはATN(1/5)の1150桁の計算とπの830桁までのチェックを完了していた。この頃，アメリカでは電子計算機ENIAC（Electronic Numerical Integrator and Computer）でπとeの値を計算する計画が進められていた。1949年6月Neumannがπとeの多数桁の計算ができる可能性を示し，これらの数値のランダム性を統計処理する目的でπとeの計算することを示唆した。この計画はGeroge W. Reitwiesnerが担当した。7月にはπ計算のプログラミングをNicholas Metropolisが申し出，結局，

Clyde V. Hauff（πのプログラミング・チェック），Homé S. McAllister（eのプログラミング・チェック）W. Barkley Fritz と George W. Reitwiesner の4人でπとeの2000桁あまりの計算を行った[22]。πとeの計算は逆算などによるチェックを行いながら進めたので倍の時ががかかった。eの計算は7月第4週末に2010桁の計算が完了した。計算時間はチェックを含め 11＋6＝17 時間であった。πの計算は Labor Day（9月第1日曜日）の週末に2035桁の計算が完了した。実際は2040桁計算したが公式発表は2035桁である。後に2037桁まで正しいことがわかった。計算時間はチェックを含め70時間，使用した公式は Machin の公式である。Neumann は Machin の公式を含め3つの公式

$$\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=8\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{10}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{515}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\frac{\pi}{4}=3\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{4}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{20}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{1985}\right)$$

を示唆したが実際に用いられたのは Machin の公式であった。

1949年9月 ENIAC がπの2035桁を算出したあとも，Wrench は ATN(1/5) のチェックを続けた。このチェックの過程で7つの転記ミスを発見。1949年10月6日，チェックを終了。すべての不一致は解消する。この結果，ENIAC と比べて，ATN(1/239) は1120桁のうち1119桁まで一致し，πの計算は1118桁まで一致していることが確認された。Wrench と Smith はなおも計算を続け，1954年11月にはπの計算を1150桁に伸ばし，1956年1月には1160桁まで計算したところで一連のπ計算の計画を打ち切った[23]。この結果，1157桁が ENIAC の計算と一致した。こうして，人間の手による計算レースは終了したのである。

6．おわりに

手計算による円周率の計算が，電子計算機 ENIAC の2035桁算出の後も続けられていたことは驚異である。ファーガソン，レンチ，スミスが808桁のπ計算の記録を更新しているさなか電子計算機があっさり記録を破ってしまった。しかし，このとき，レンチとスミスは1000桁を越えて計算していたためπ計算を止めるわけにいかなかった。1954年11月にはニコルソン，ジーネルが NORC を用いて3093桁計算したが，それでもレンチとスミスは計算を止めず最終的には1956年1月に1160桁計算して完了したのである。当時の文献には人間の計算者は Computer と綴られている。レンチは手計算の完了後，電子計算機によるπ計算のレースに参加し，1961年ダニエル・シャンクスと共同で IBM7090 を用いて100265桁計算し，初の10万桁を越える世界記録を打ちたてた。おそらく溜飲を下げたことだろう。その後の電子計算機によるπ計算の競争はすさまじく，ATN の級数計算によって200万桁まで，ガウス・ルジャンドルのモデュラー型の反復法によって2000億桁まで計算された。反復法の時代になってからは日

川崎医会誌一般教，30号(2004)

本人計算者の独壇場である。現在のπ計算の世界記録は1兆2411億7730万4180桁である。達成日時は2002年11月24日13時39分で達成者は後保範（日立製作所，早稲田大学），金田康正（東京大学）ら東大と日立製作所技術者を中心とする10名の研究チームである。主計算に用いた公式は1982年に日本人の高野喜久雄が発見した公式

$$\frac{\pi}{4}=12\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{49}\right)+32\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{57}\right)-5\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)+12\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{110443}\right)$$

であり，検証計算に用いた公式は1982年に F.C.M. Störmer が発見した公式

$$\frac{\pi}{4}=44\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{57}\right)+7\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)-12\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{682}\right)+24\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{12943}\right)$$

である。総計算時間は747時間１分でそのうち主計算には500時間を要した。

江戸時代の和算家による円周率の計算手法には見るべきものがあるが言及できなかった。またの機会にゆずる。

表１　級数による円周率の手計算史（1699-1853）

計算年	計算者および使用公式	小数点以下計算した桁数（小数点以下正しい桁数）
1699年	Abraham Sharp (1651-1742, 英) $\frac{\pi}{6}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	72 (71)
1706年	John Machin（1680-1752, 英） $\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$	100 (100)
1719年	Thomas Fantet de Lagny（1660-1734, 仏） $\frac{\pi}{4}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)$ 113桁目に１字だけのミスプリント	127 (127)
1789年	Baron Georg von Vega (1756-1802, オーストリア) $\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$	143 (126)
1794年	Baron Georg von Vega $\frac{\pi}{4}=5\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)+2\mathrm{ATN}\left(\frac{3}{79}\right)$	140 (136)
1837年	J. F. Callet（Paris, 仏）	154 (152)
1841年	William Rutherford（1798-1871, 英） $\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{70}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{99}\right)$	208 (152)
1844年	Johann Martin Zacharias Dahse (1824-1861, Wien) $\frac{\pi}{4}=\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)+\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{8}\right)$ これはL. K. Schulz von Strassnitzky（1803-1852, Wien）の発見した公式でDahseはわずか２か月で計算した。Dahseは暗算の名人である。	205 (200)
1847年	Thomas Clausen（1801-1885, 独） $\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{5}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{239}\right)$ $\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$ この二つの公式で二通りの計算をした。	250 (248)
1853年	W. Lehmann（Potsdam） $\frac{\pi}{4}=4\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{2}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)$ $\frac{\pi}{4}=2\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{3}\right)-\mathrm{ATN}\left(\frac{1}{7}\right)$ レーマンも二通りの方法で計算した。	261 (261)

表2　πの手計算記録（1851-1956）

計　算　年	計　算　者	小数点以下計算した桁数 (小数点以下正しい桁数)
1851年	Shanks	318(315)
1853年	Lichter	333(330)
1853年	Lehmann	261(261)
1853年	Rutherford	441(441)
1853年	Shanks	530(527)
1853年	Shanks	607(459)
1854年	Lichter	400(400)
1854年	Lichter	500(448)
1855年	Lichter	500(500)
1873年	Shanks	707(527)
1946年	Ferguson	540(540)
1946年7月	Ferguson	620(620)
1946年11月	Ferguson	700(700)
1947年1月	Ferguson	710(710)
1947年1月	Wrench and Smith	811(722)
1947年2月	Wrench and Smith	818(722)
1947年5月	Ferguson	750(750)
1948年	Ferguson, Wrench & Smith	808(808)
1949年9月	Reithwiesner (ENIAC)*	2040(2037)
1949年10月6日	Wrench and Smith	1120(1118)
1954年11月	Wrench and Smith	1150(1150)
1956年1月	Wrench and Smith	1160(1157)

＊ 電子計算機による計算

参　考　文　献

1) 平山　諦：『円周率の歴史』改訂新版，大阪教育図書，1980

2) ベックマン：『πの歴史』，蒼樹書房，1973

3) ブラットナー：『π〔パイ〕の神秘』，アーティストハウス，1999

4) ジャン=ポール・ドゥラエ：『π－魅惑の数－』，朝倉書店，2001

5) J. W. Wrench: The evolution of extended decimal approximations to π. The Mathematics Teacher: 644-650, December, 1960

6) Hermann C. Schepler: THE CHRONOLOGY OF PI. Mathematics Magazine: 165-170, 216-228, 279-283, 1950

7) William Rutherford: Computation of the Ratio of the Diameter of a Circle to its circumference to 208 places of figures. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 131: 281-283, 1841

8) Z. Dahse: Der Kreis-Umfang fur den Durchmesser 1 auf 200 decimalstellen berechnet. Journal für die reine und angewandte Mathematik 27: 198, 1844

9) Richer: Archiv der Mathematik und Physik 21: 119, 1853

Richer: Archiv der Mathematik und Physik 22:473, 1854
Richer: Archiv der Mathematik und Physik 23:475-476, 1854
Richer: Archiv der Mathematik und Physik 25:471-472, 1855
10) Richer: Nouvelles Annales des Mathematiques 13:418-423, 1854
11) William Rutherford: On the Extention of the value of the ratio of the Circumference of a circle to its Diameter. Proceedings of the Royal Society of London 6:273-275, 1853
12) William Rutherford: On the Extention of the value of the ratio of the Circumference of a circle to its Diameter. Philosophical Magazine. series 4, 5:213-214, 1853
13) William Shanks: On the Extension of the Numerical value of π. Proceedings of the Royal Society of London 21:318-319, 1873
14) William Shanks: On certain Discrepancies in the published numerical value of π. Proceedings of the Royal Society of London 22:45-46, 1873
15) D. F. Ferguson: Value of π. Nature 157:342, 1946
16) D. F. Ferguson: Evaluation of π. Are Shanks' figures correct?: Mathematical Gazette 30: 89-90, 1946
17) Peder Pederson: Mathematical Tables and other Aids to Computation 2:68-69, 1946
18) R. C. Archibald: Approximations to π. Mathematical Tables and other Aids to Computation 2:143-145, 1946
19) Smith & Wrench, Ferguson: A New Approximation to π. Mathematical Tables and other Aids to Computation 2:245-248, 1947
20) D. F. Ferguson: Mathematical Tables and other Aids to Computation 2:320, 1947
21) Ferguson and Wrench: A New Approximation to π (Conclusion). Mathematical Tables and other Aids to Computation 3:18-19, 1948
22) George W. Reitwiesner: An ENIAC Determination of π and e to more than 2000 Decimal Places. Mathematical Tables and other Aids to Computation 4:11-15, 1950
23) J. W. Wrench, JR. and L. B. Smith: Values of the terms of Gregory series for arccot 5 and arccot 239 to 1120 and 1150 decimal places, respectively. Mathematical Tables and other Aids to Computation 4:160-161, 1950
24) 三浦伸夫：『円測病に憑かれた人たち』，数学文化001：37-45，2003